



Processus multifractals en finance et valorisation d'options par minimisation de risques extrêmes.

Benoit Pochart

► To cite this version:

Benoit Pochart. Processus multifractals en finance et valorisation d'options par minimisation de risques extrêmes.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2003. Français. NNT: . pastel-00000704

HAL Id: pastel-00000704

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00000704>

Submitted on 21 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Benoît POCHART

**Processus multifractals en finance
et valorisation d'options par minimisation
de risques extrêmes**

Soutenue le 27 novembre 2003 devant le jury composé de

MM. Dominique GUÉGAN	Présidente
Bernard LAPEYRE	Rapporteur
Jean-François MUZY	Rapporteur
Nicole EL KAROUI	
Lisa BORLAND	
Jean-Philippe BOUCHAUD	

Remerciements

Il m'aurait été impossible de mener à terme ce travail sans les conseils de nombreuses personnes et le soutien d'autres, encore plus nombreuses.

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Jean-Philippe Bouchaud, pour son immense disponibilité et son enthousiasme jamais pris en défaut. Ce travail lui doit évidemment beaucoup et ses idées, son souci constant de comprendre intuitivement et simplement un modèle ont, je crois, profondément influencé mon étude.

Je tiens également à remercier Nicole El Karoui qui a toujours su se montrer présente et accessible malgré son emploi du temps chargé. Jean-François Muzy a constamment fait preuve d'intérêt pour mon travail et je les remercie, lui et Bernard Lapeyre, d'avoir accepté la tâche de rapporteur. Ma reconnaissance va également à Dominique Guégan et Lisa Borland qui me font l'honneur de faire partie de mon jury ainsi qu'à Tanguy Dehapiot qui a eu la gentillesse de venir assister à ma soutenance.

Je souhaite également remercier Marc Potters pour ses conseils et le temps qu'il a bien voulu m'accorder au début de mes recherches.

Toute ma gratitude va aux différents membres du CMAP, à son directeur Vincent Giovannigigli, à Emmanuel Bacry, au groupe "Modélisation mathématique en finance" et en particulier à Rama Cont pour les nombreux séminaires et groupes de travail qu'il a organisés et animés, à mes camarades de bureau Sofiane et Karim, à Sylvain Ferrand pour son aide en informatique, à Jeanne Bailleul pour l'extrême efficacité et gentillesse dont elle fait preuve en toute circonstance et à Fabrice Baronnet de l'école doctorale.

Enfin, du fond du coeur, je remercie ma famille et mes amis de leur soutien indéfectible et, pour certains, de leur amour.

Table des matières

Introduction	13
1 Marchés financiers et faits stylisés	17
1.1 Notations	18
1.2 Distribution des rendements	19
1.2.1 Modélisation gaussienne	19
1.2.2 Etude empirique d'une série financière	21
1.2.3 Etudes fines de la loi de distribution des cours financiers	26
1.3 Etude de la structure de dépendance	28
1.3.1 Corrélations linéaires	28
1.3.2 Corrélations non linéaires	29
1.3.3 Quelques modèles	32
1.4 Asymétrie	35
1.5 Corrélations entre séries financières	37
1.6 Conclusion	38
2 Processus multifractals et finance	39
2.1 Invariance d'échelle	39
2.2 Processus auto-similaires	40
2.2.1 Définitions	40
2.2.2 Exemples	41
2.3 Processus multifractals	48
2.3.1 Moments et lois d'échelle	48
2.3.2 Premières propriétés des processus multifractals	48
2.3.3 mise en évidence de la multifractalité	49
2.4 Analyse multifractale	52
2.4.1 Régularité locale, exposant de Hölder	53
2.4.2 Spectre de singularité	53
2.4.3 Formalisme multifractal	54
2.5 Modèles en cascade	55
2.5.1 Mesure binomiale	55
2.5.2 Mesure multinomiale	55
2.5.3 Cascades multiplicatives	55
2.5.4 Conclusion	59

2.6	MMAR	59
2.6.1	Définition	59
2.6.2	Propriétés	60
2.6.3	Conclusions	61
2.7	MRW	61
2.7.1	Construction	61
2.7.2	Moments : convergence et lois d'échelle	63
2.7.3	Corrélations	67
2.7.4	Estimations des paramètres	67
2.7.5	Mouvement fractionnaire	68
2.7.6	Conclusions	68
2.8	Autres travaux	68
2.8.1	Points à améliorer dans les deux approches	68
2.8.2	Travaux de Calvet et Fisher	69
2.8.3	Travaux de Bacry et Muzy	69
2.9	Multifractalité dans les séries financières	69
2.10	Drawdowns	72
2.10.1	Résultats exacts pour un mouvement brownien biaisé	72
2.10.2	Intégrales de chemin	73
2.10.3	Cas du processus MRW	74
2.10.4	Conclusions	76
3	Processus multifractal asymétrique	79
3.1	Motivation	79
3.2	SMRW	79
3.2.1	Construction	79
3.2.2	Implémentation numérique	80
3.3	Lois d'échelle	81
3.3.1	Second moment	81
3.3.2	Troisième moment	83
3.3.3	Moments d'ordre supérieur	84
3.3.4	Autres noyaux	85
3.3.5	Utilisation d'un bruit fractionnaire	86
3.4	Comparaison des prédictions avec les simulations	86
3.4.1	Méthodologie	86
3.4.2	Résultats	86
3.5	Effet HARCH	87
3.6	Application à la valorisation d'options	91
3.6.1	Effet de smile	91
3.6.2	Valorisation d'options avec le SMRW	93
3.7	Conclusions et perspectives	97

4 Couverture par minimisation de risque	101
4.1 Motivations	101
4.1.1 Rappels sur le modèle de Black-Scholes et les marchés complets	101
4.1.2 Imperfections et marchés incomplets	101
4.2 Première approche : méthode statique	103
4.2.1 Notations	103
4.2.2 Objectifs	103
4.2.3 Hypothèses du modèle	103
4.2.4 Minimisation	104
4.2.5 Conclusions et extensions possibles	113
4.3 Méthode dynamique	115
4.3.1 Principe	115
4.3.2 Précisions sur l'implémentation	117
4.3.3 Résultats	118
4.4 Application aux coûts de transaction	125
4.5 Conclusion	127
Conclusion	131
A Simulation de variables gaussiennes corrélées	133
B Mesure de Hausdorff	135
C Calcul des moments d'ordre supérieur du SMRW	137
D Utilisation d'un mouvement brownien fractionnaire	141
D.1 H -MRW	141
D.1.1 Modèle	141
D.1.2 Lois d'échelle	142
D.2 H -SMRW	142
D.2.1 Modèle	142
D.2.2 Lois d'échelle	143
D.2.3 Moments pairs	143
D.3 Conclusion	144

Table des figures

1.1	Mouvement brownien	20
1.2	Indice SP500	21
1.3	Rendements du SP500	22
1.4	Loi de distribution empirique du SP500	23
1.5	qq -plot du SP500	25
1.6	Autocovariance des rendements du SP500	28
1.7	Autocovariance des rendements asolus	29
1.8	Fit exponentiel de l'autocovariance des rendements asolus	30
1.9	Autocovariance des rendements absolus mélangés	31
1.10	Fonction de leverage pour les actions	36
2.1	Auto-similarité du mouvement brownien	42
2.2	Processus de Lévy α -stable	44
2.3	Auto-similarité du processus de Lévy α -stable	45
2.4	Mouvement brownien fractionnaire	47
2.5	Exemple d'ondelettes : gaussienne et chapeau mexicain	51
2.6	Processus MRW	64
2.7	Fonction de partition du SP500	70
2.8	Exposant d'échelle du SP500	71
2.9	Distribution des drawdowns d'un mouvement brownien biaisé	73
2.10	Distribution prédite pour les drawdowns du MRW	76
2.11	Fit des drawdowns du MRW	77
3.1	Processus SMRW	82
3.2	Deuxième et quatrième moment du SMRW	88
3.3	Troisième moment du SMRW	89
3.4	Comparaison troisième moment empirique et théorique	90
3.5	Volatilité implicite avec le SMRW	95
3.6	Développement en cumulants tronqué	98
3.7	Volatilité implicite en fonction de l'asymétrie	99
4.1	Distribution de la richesse finale pour $N=10$	107
4.2	Distribution de la richesse finale pour $N=100$	108
4.3	Distribution de la richesse finale pour $N=500$	109
4.4	Distribution de la richesse finale pour $N=100$ et une volatilité de 10%	110

4.5	Distribution de la richesse finale pour $N=100$ et une volatilité de 40%	110
4.6	Probabilité de dépassement en fonction de N à volatilité constante (tracé log-log)	114
4.7	Probabilité de dépassement en fonction de N à strike constant (tracé log-log)	115
4.8	$\phi(x)$ optimal en marché gaussien	119
4.9	Distribution de la richesse finale pour différentes stratégies(marché gaussien)	120
4.10	$\phi(x)$ optimal en marché non-gaussien	121
4.11	Distribution de la richesse finale pour différentes stratégies(marché non-gaussien, $\nu = 6$)	122
4.12	Distribution de la richesse finale pour différentes stratégies(marché non-gaussien, $\nu = 4$)	123
4.13	Volatilité implicite à $t = 0$ pour différents seuils Δ_0	124
4.14	$\phi(x)$ optimal en marché gaussien avec frais de transaction	128

Liste des tableaux

1.1	Skewness et kurtosis des rendements du SP500	23
1.2	Tests de normalité pour le SP500	24
3.1	Cumulants implicites, théoriques et empiriques pour $\alpha = 0.3$	96
3.2	Cumulants implicites, théoriques et empiriques pour $\alpha = 0.6$	96
4.1	Probabilité de dépassement en fonction de σ , à \tilde{K} fixé	113
4.2	Probabilité de dépassement en fonction de \tilde{K} , à σ fixé	113
4.3	Probabilité de dépassement en fonction de \tilde{K} , à K fixé	113
4.4	Logarithme de la probabilité de dépassement en fonction de $\log N$	114
4.5	Expected shortfall conditionnel et inconditionnel ($\nu = 6$)	121
4.6	Expected shortfall conditionnel et inconditionnel ($\nu = 4$)	125
4.7	Caractéristiques de la distribution finale, $\nu = 6$	125
4.8	Caractéristiques de la distribution finale, $\nu = 4$	126
4.9	Impact des coûts de transaction sur la stratégie de Black-Scholes	128
4.10	Impact des coûts de transaction sur la stratégie de Leland	129
4.11	Impact des coûts de transaction sur notre stratégie ($\Delta_0 = -1$)	129
4.12	Impact des coûts de transaction sur notre stratégie ($\Delta_0 = -5$)	130

Introduction

Il est devenu courant de classer les marchés financiers parmi les archétypes de systèmes humains complexes. Il est vrai que le nombre gigantesque d'agents qui interviennent et interagissent en font sans conteste une des organisations collectives les plus achevées, reflet de la peur ou du goût du risque, du mimétisme et parfois de la folie des hommes. Comme l'indiquait Bachelier dans sa thèse, "la dynamique de la Bourse ne sera jamais exacte" et son étude rationnelle passe par l'aveu de la nécessité d'une modélisation probabiliste. Les facteurs qui influencent le marché sont en effet innombrables et personne ne les maîtrise entièrement. L'information n'est pas la même pour tout le monde et chaque acteur forge sa propre opinion avec une dynamique qui lui est propre, s'inspirant sans doute des croyances des autres mais les influençant lui même en retour. La meilleure stratégie à adopter est sans doute d'accepter notre impuissance à prévoir les mouvements des cours et de plutôt chercher à en évaluer leur probabilité.

La première modélisation des cours qui a été proposée est celle par un mouvement brownien, esquissée dès 1900 par Bachelier et elle restera largement admise pendant plus de soixante ans. Il faut dire que les propriétés très spécifiques de la modélisation gaussienne vont grandement faciliter les travaux d'économie théorique sur l'équilibre des marchés financiers. Ceux-ci culminent avec les théories du portefeuille de Markowitz, prolongées par le modèle du CAPM de Sharpe et Lintner et la théorie des options développée par Black, Scholes et Merton. En particulier ces dernières recherches vont coïncider avec le développement outre-Atlantique des produits dérivés.

Paradoxalement, plusieurs études, notamment celles de Mandelbrot et Fama dans les années soixante, montrent que les cours financiers sont loin de suivre une loi gaussienne. En particulier l'occurrence d'événements extrêmes est beaucoup plus forte en réalité que dans les modèles utilisés, ce que viendra dramatiquement confirmer le krach d'octobre 1987. Notre premier chapitre s'attachera à présenter le plus précisément possible les lois de probabilité qui décrivent les cours financiers. Ceux-ci apparaîtront comme des objets statistiques complexes, avec des caractéristiques universelles très intrigantes, partagées par la plupart des séries étudiées. Nous verrons en particulier que, contrairement à une prédiction naïve, la forme des rendements reste étonnamment stable au cours du temps. Ceci s'explique sans doute par la présence de dépendances très particulières entre les rendements. Si ceux-ci restent parfaitement décorrélés, leurs valeurs absolues ou leurs carrés présentent eux de fortes corrélations qui en outre sont extrêmement persistantes : l'existence de cette mémoire longue non linéaire dans

les cours financiers, si elle reste discutée par certains, est à notre avis l'une des caractéristiques essentielles à prendre en compte pour une modélisation fidèle.

Après avoir effectué une brève revue des modèles utilisés traditionnellement en finance (processus ARCH, modèles à volatilité stochastique, processus de Lévy) et donné pour chacun ses principales faiblesses, nous présentons une autre classe de processus qui suscite depuis peu un intérêt croissant en finance, les processus multifractals. Cette notion a été introduite la première fois par Benoît Mandelbrot pour décrire le phénomène de turbulence et est devenue très populaire dans ce domaine surtout à la suite des travaux de Frisch et Parisi. Ceux-ci relient en particulier l'approche de Mandelbrot à l'étude classique des fonctions de structure, donnant ainsi naissance à ce qui allait devenir le formalisme multifractal. Développée essentiellement par des physiciens, l'étude des objets multifractals a souvent pris des formes diverses et peu unifiées. Nous avons choisi comme axe d'étude l'approche qui nous semblait la plus simple et la plus intuitive, et en même temps la plus naturelle d'un point de vue financier, en nous concentrant sur l'étude et la caractérisation des propriétés d'échelle. En ce sens, les processus multifractals peuvent être vus comme une généralisation des processus auto-similaires. Nous exposerons également l'approche de l'analyse multifractale et, en expliquant le lien entre ces deux points de vue, le formalisme multifractal. Nous présenterons deux constructions récentes de processus multifractals qui ont été proposées en vue de la modélisation de séries financières : les processus MMAR (Multifractal Model of Asset Returns) de Calvet, Fisher et Mandelbrot et le processus MRW de Bacry, Delour et Muzy. Nous insisterons en particulier sur le calcul de quantités intéressantes d'un point de vue financier (corrélations, moments, drawdowns) et sur les liens qui peuvent exister entre ces deux approches.

Un problème majeur n'est pourtant pas traité dans ces deux modèles, c'est celui de l'asymétrie, qu'il est essentiel de prendre en compte en finance mais aussi dans bien d'autres domaines, comme l'étude de la turbulence. Les constructions précédentes sont en effet explicitement symétriques et il ne semble pas trivial de les modifier.

L'asymétrie en finance prend plusieurs formes qui entretiennent des liens entre elles. En particulier, l'effet "leverage" qui a été l'objet de peu d'études théoriques est bien connu des praticiens : on observe que les cours passés sont corrélés négativement avec la volatilité des cours futurs, tandis que l'effet inverse (corrélation entre volatilités passées et cours futurs) peut être considéré comme nul. Nous avons donc proposé la construction d'une généralisation du mouvement MRW, le processus SMRW, qui prend en compte cet effet sans pour autant perdre ses propriétés multifractales. Nous y parvenons grâce à l'introduction d'un noyau d'asymétrie, décroissant en loi puissance et dont l'absence d'échelle caractéristique préserve les propriétés d'échelle. Le processus que nous obtenons conserve en effet les mêmes lois d'échelle que le processus MRW pour les moments pairs tandis qu'il présente une loi d'échelle différente pour les moments impairs.

Nous donnons ensuite des applications possibles de notre processus en finance. Tout d'abord nous montrons qu'il permet de prendre en compte une autre asymétrie des marchés financiers, documentée sous le nom d'effet "HARCH". Ensuite, nous montrons que son utilisation pour la valorisation d'options peut se révéler fructueuse puisqu'il permet de reproduire, avec peu de paramètres, une large variété de figures de smile, compatibles avec celles observées sur les

marchés. En particulier, nous montrons que, contrairement aux modélisations classiques, la forme obtenue conserve sur une gamme de maturités étendue son asymétrie.

La dernière partie de notre étude se concentre sur les problèmes de valorisation et de couverture d'options. Dans le modèle de Black-Scholes ces questions ne sont pas essentielles. En effet, dans ce cadre, le marché est complet et tout actif financier contingent (une option par exemple) peut être parfaitement répliqué par un portefeuille constitué de l'actif sans risque et de l'actif risqué de base. De plus, le prix et la stratégie de couverture sont connus (à un calcul d'espérance près) et des formules fermées existent dans plusieurs cas. Ce résultat est en fait assez surprenant : il est possible pour le vendeur d'une option, produit d'assurance par excellence, de se soustraire au risque. Le paradoxe trouve sa source et son explication dans la modélisation choisie dont les propriétés très spécifiques (utilisation d'un mouvement brownien pour l'évolution de l'actif risqué, pas de frais de transaction, possibilité d'agir en continu, etc) conduisent à cette conclusion stupéfiante. En pratique bien sûr, les hypothèses sont beaucoup trop optimistes et le résultat n'est que partiellement exploitable. Si l'on cherche à rendre la modélisation plus réaliste, nous sommes très vite amenés à considérer le cas de marchés incomplets où les résultats de réplication précédents ne sont plus applicables. Il est alors nécessaire de faire appel à d'autres critères pour déterminer le prix et la couverture d'une option.

Plusieurs notions de risque ont été proposées et utilisées. Parmi les plus connues, nous pouvons citer l'approche quadratique qui consiste à trouver le portefeuille dont la différence avec le pay-off final de l'option a la plus faible variance. Le choix de ce critère est assez arbitraire et on peut lui préférer une notion moins symétrique. Récemment a été proposée une approche de gestion par minimisation de quantiles ou d'expected shortfall : dans les deux cas l'idée est de s'autoriser un seuil de pertes et de minimiser la probabilité (ou une quantité comparable) de le dépasser. Pour l'instant, les travaux sont restés au stade d'une formulation théorique certes très séduisante mais plus complexe à mettre en œuvre qu'il n'y paraît. Notre but a été présenté une méthode pratique, orientée vers l'application numérique, pour résoudre un tel problème. Nous généralisons pour cela l'algorithme de [PBS01] pour traiter le cas d'un risque local quelconque et non plus exclusivement quadratique. Nous illustrons notre méthode avec l'exemple d'un expected shortfall local mais bien d'autres fonctions peuvent être utilisées. Les résultats obtenus sont prometteurs et montrent qu'en présence de distributions larges pour les incréments notre procédure conduit à une stratégie variant beaucoup moins que celle de Black-Scholes. Ceci est particulièrement intéressant en présence de coûts de transaction, situation dans laquelle notre stratégie se révèle également très compétitive.

Chapitre 1

Marchés financiers et faits stylisés

Les premiers travaux à proposer une approche scientifique des marchés financiers remontent à 1900 avec la thèse de Bachelier [Bac00]. Celui-ci y esquisse une "théorie de la spéculation", jetant ainsi avec une avance considérable sur son temps les fondements de la finance mathématique moderne. Au passage il développe aussi, cinq ans avant Einstein, la théorie du mouvement brownien dont on sait aujourd'hui la place centrale au sein non seulement de la finance quantitative mais bien plus généralement des mathématiques et de la physique modernes [UO30, Nel67, KS88, RY91]. Sans doute trop visionnaire pour son époque, sa thèse est assez mal reçue et tombe rapidement dans l'oubli. Elle n'est redécouverte qu'un demi-siècle plus tard pour acquérir enfin la reconnaissance qui lui était due.

Le postulat de base de Bachelier est qu'il est possible de représenter l'évolution des cours financiers par une loi de probabilité adaptée. Il peut paraître très prétentieux, voire illusoire, de réduire le résultat de comportements humains, par nature imprévisibles et souvent irrationnels, à une formule mathématique. Paradoxalement, comme le souligne Bachelier, le grand nombre et l'imprédictabilité de ces décisions rend leur somme régulière *en moyenne*. L'idée n'est pas neuve : déjà en physique, Boltzmann a renoncé à vouloir décrire individuellement chaque molécule d'un gaz pour en donner une description statistique collective basée sur la loi des grands nombres. Un des résultats importants de la thèse de Bachelier est la construction du mouvement brownien afin de modéliser les cours financiers. Cette modélisation est encore aujourd'hui au coeur de la théorie financière. Samuelson [Sam65] suggère simplement d'utiliser plutôt un mouvement brownien géométrique et les travaux fondamentaux de Sharpe [Sha85] et Lintner [Lin65] sur le CAPM et de Black, Scholes [BS73] et Merton [Mer73] sur la valorisation d'option s'appuient sur ce modèle sans le contester.

Depuis le krach retentissant d'octobre 1987, tout le monde sait pourtant qu'il est très largement imparfait et sous évalue grandement la probabilité d'occurrence d'événements extrêmes : avec un tel modèle, la chute qu'ont connue les marchés financiers n'avait qu'une chance sur 10^{-23} de se réaliser, autant dire qu'elle n'aurait jamais dû être observée ! De même l'effondrement en 1998 du fonds de gestion LTCM montre les limites de la théorie "brownienne" des options, dont l'effet de levier peut s'avérer dramatique en cas de forte hausse ou baisse. Ces deux exemples de cataclysmes financiers illustrent tout l'intérêt d'une bonne modélisation des cours, essentielle pour développer une gestion qui soit réaliste, efficace, adaptée aux marchés. Pour un organisme financier il est devenu primordial de mieux évaluer et contrôler

les risques qu'il encourt par son activité, ce qui requiert là aussi invariablement le modèle le plus juste possible. Enfin, de nouvelles stratégies de gestion, comme le trading automatique ou l'arbitrage statistique, sont apparues et réclament une confiance encore accrue dans le modèle utilisé.

Plus que jamais, la détermination de la loi sous jacente est donc un enjeu majeur de l'industrie financière. L'apparition de bases de données gigantesques¹ et la puissance de calcul accrue des ordinateurs ont fortement contribué à développer ce secteur de recherche. Si les faits stylisés que nous allons présenter sont donc aujourd'hui bien connus et documentés, leur origine reste pour la plupart inconnue ce qui explique sans doute qu'à ce jour aucun modèle ne se soit réellement imposé à tous.

1.1 Notations

Dans la suite, nous noterons $S(t)$ le cours en fonction du temps t d'un actif financier qui pourra être une action, un taux de change ou encore un indice financier. Le plus souvent nous n'étudierons pas directement les cours mais plutôt leur logarithme $X(t) = \ln S(t)$ et surtout, pour une échelle de temps Δt donnée, les rendements logarithmiques (ou "log-returns") :

$$r(t, \Delta t) = X(t + \Delta t) - X(t) = \ln \left(\frac{S(t + \Delta t)}{S(t)} \right) \quad (1.1)$$

Notons que pour Δt petit

$$r(t, \Delta t) \simeq \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)}$$

si bien que nous confondrons souvent les notions de rendements et de rendements logarithmiques.

Nous choisirons comme espace d'état (c'est à dire les valeurs qui peuvent être prises par ces rendements) l'ensemble \mathbb{R} que nous supposons muni d'une probabilité P , la probabilité historique ou objective, sous laquelle nous observons les cours.

Une question essentielle à se poser avant toute tentative de modélisation statistique est celle de la stationnarité. En termes simples, le problème est de savoir si les propriétés que nous étudions demeurent, au moins raisonnablement, stables dans le temps. Si ce n'est pas le cas, il est bien sûr illusoire de tenter de les estimer par des moyennes temporelles.

DÉFINITION 1.1.1 (STATIONNARITÉ)

On dira d'un processus $(X(t), t \in \mathbb{R})$ qu'il est stationnaire si pour tout $h > 0$ on a l'égalité en loi des deux processus

$$(X(t + h), t \in \mathbb{R}) \stackrel{d}{=} (X(t), t \in \mathbb{R})$$

A priori rien n'assure que les rendements étudiés demeurent stationnaires dans le temps et il paraît même peu probable qu'ils le soient strictement. Après tout, pourquoi le cours des actifs

¹Sur la majorité des marchés, il est aujourd'hui possible de disposer des cotations tick par tick (environ toutes les 15 secondes). L'utilisation de ces données à haute fréquence n'est cependant pas simple sur un plan statistique et il est souvent impératif d'opérer un filtrage élaboré avant toute étude [DGM⁺01]

dans les années cinquante aurait-il les mêmes caractéristiques qu'aujourd'hui, après d'autres guerres, des krachs boursiers et pétroliers, des révolutions technologiques accompagnées pour certaines de bulles spéculatives. Néanmoins la plupart des tests effectués pour tester la stationnarité des rendements ne rejettent pas cette hypothèse [Pag96]. En conséquence nous pouvons raisonnablement faire des statistiques sur nos données, en conservant toutefois en tête qu'une modélisation demeure toujours une simplification du réel, parfois trompeuse.

1.2 Distribution des rendements

1.2.1 Modélisation gaussienne

Avant d'étudier les caractéristiques d'une série financière réelle, nous voulons revenir quelques instants sur le paradigme gaussien pour d'une part le décrire un peu plus précisément et d'autre part saisir tous les enjeux de son abandon.

Motivations Chaque opérateur sur un marché financier, par son expérience, ses informations, ses erreurs d'appréciation, ses besoins ou ses objectifs, possède ses propres convictions sur l'évolution d'un actif et elles sont généralement contradictoires entre elles : ainsi si certains sont persuadés que l'actif va baisser, d'autres croient fermement à sa hausse. Comme le remarque Bachelier, cette hétérogénéité des croyances est d'ailleurs indispensable à l'établissement d'un cours d'équilibre. Produit de la confrontation entre une multitude d'ordres d'achat et de vente, celui-ci peut être vu comme la somme d'accroissements aléatoires. Or, sous des hypothèses assez générales, nous savons qu'en vertu du théorème de la limite centrale, une somme de variables aléatoires converge vers une gaussienne, ce qui semble justifier une modélisation par un mouvement brownien.

Sur la figure 1.1 nous avons représenté ce processus (avec une dérive correspondant au taux d'intérêt) qui, au premier coup d'oeil, ressemble assez aux chroniques boursières que chacun a eu l'occasion de voir au moins une fois dans sa vie.

Importance théorique Cette apparente adéquation avec la réalité et sa facilité d'utilisation ont contribué à rendre populaire la modélisation gaussienne dans le milieu financier. Mais c'est surtout la foule de résultats obtenus grâce à elle qui vont définitivement lui donner le statut de paradigme indépassable. Ainsi les résultats sur la théorie du portefeuille [Mar52] et le CAPM [Sha85] supposent une distribution gaussienne des actifs. De même la théorie des options initiée par Black, Scholes et Merton [BS73, Mer73] est intimement liée à des résultats de probabilité propres au mouvement brownien, qui ne sont plus vérifiés en général pour d'autres processus.

La place centrale et incontournable de cette modélisation dans la théorie financière explique sans doute en partie le relatif désintérêt qu'a longtemps connu l'étude précise des rendements. Et s'il est vrai qu'il est aujourd'hui assez simple de donner un modèle surclassant le mouvement brownien dans la description des cours, le point essentiel, et infiniment plus difficile, reste encore de l'intégrer dans une théorie générale.

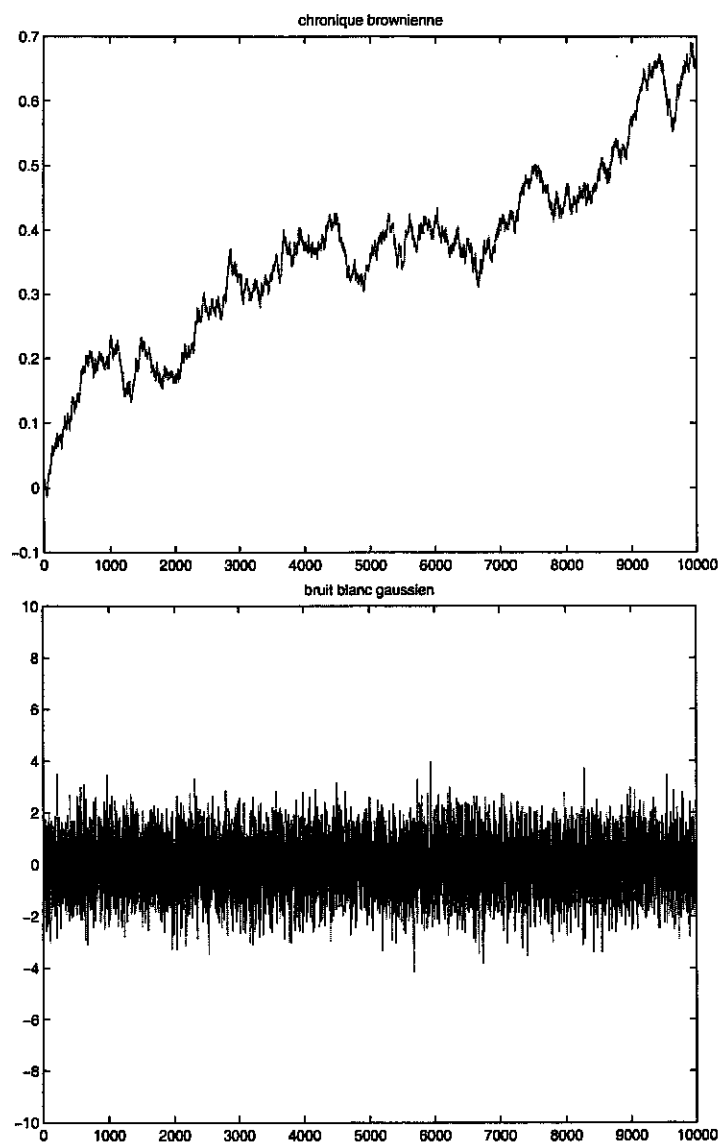


FIG. 1.1: Mouvement brownien (avec dérive) et ses accroissements (normalisés). La trajectoire du mouvement brownien peut, au moins en première approximation, passer pour un cours financier. Au vu des incréments, on peut noter l'extrême régularité de l'aléa gaussien

1.2.2 Etude empirique d'une série financière

Données Nous avons étudié les rendements de l'indice Standard & Poor's 500, de janvier 1953 à juin 2001, soit une série de 12184 cotations quotidiennes (Figure 1.2). Cet indice est une moyenne des cours des 500 plus grosses capitalisations cotées à la bourse de New York et représente un des indicateurs financiers les plus regardés par les marchés.

Nous avons systématiquement normalisé les incréments que nous étudions : nos séries sont

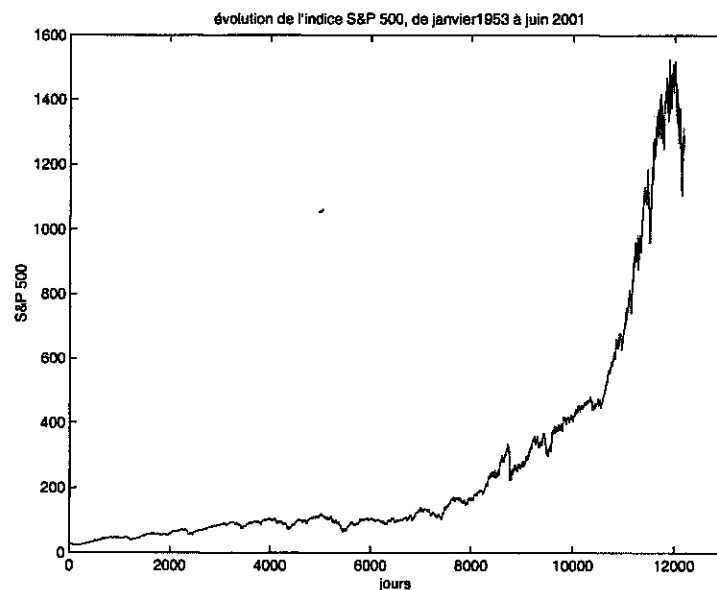


FIG. 1.2: L'indice SP500 de janvier 1953 à juin 2001.

donc de moyenne nulle et de variance unité. Chacune d'entre elles étant ramenée à la même échelle, nous pourrions les comparer sans difficulté. La figure 1.3 montre les rendements journaliers du S&P500.

Analyse La différence est frappante avec la figure 1.1. Les rendements de l'indice paraissent beaucoup plus sauvages que le bruit blanc. En premier lieu, les données réelles peuvent atteindre des niveaux très importants qui ne sont jamais approchés par les tirages gaussiens. Par ailleurs, contrairement au bruit gaussien qui donne l'impression d'une certaine uniformité, la variabilité de l'indice change au cours du temps. En effet, les rendements sont très fluctuants autour de leur valeur moyenne et peuvent prendre des valeurs très faibles comme des valeurs très grandes. En outre des cycles semblent se former : il y a des périodes pendant lesquelles les rendements, en valeur absolue, sont très élevés et d'autres pendant lesquelles ils demeurent beaucoup plus sages. Ce dernier point nous intéressera dans la partie suivante. Pour l'instant, nous nous concentrons sur l'étude de la distribution des rendements.

Pour estimer, de manière non paramétrique, la densité de probabilité des rendements, nous

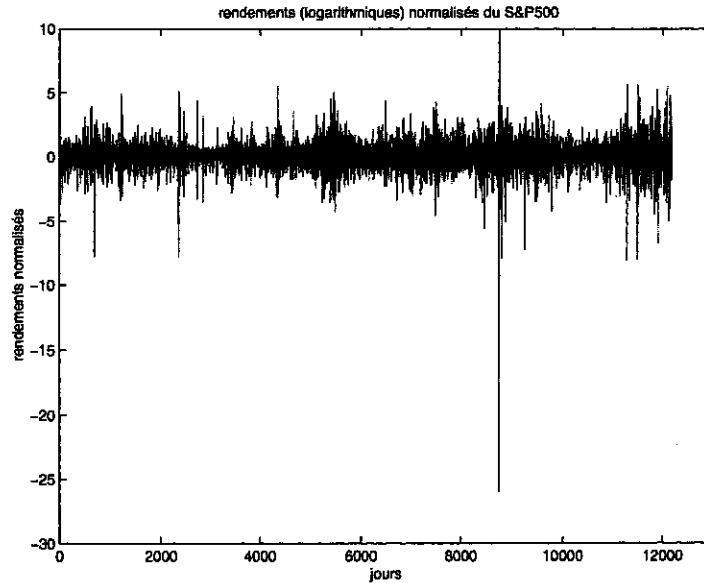


FIG. 1.3: Rendements de l'indice SP500 de janvier 1953 à juin 2001. On peut noter le pic négatif des rendements correspondant au krach de 1987. L'allure est très différente du bruit gaussien : la variabilité de la série est plus importante et des cycles semblent apparaître.

avons utilisé un estimateur à noyau gaussien [Sil85, Dev87]

$$\hat{f} = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)$$

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

La figure 1.4 représente les densités obtenues pour différents rendements : journaliers, à 10 jours ou à 50 jours. En guise de comparaison, nous avons tracé sur le même graphique la densité gaussienne standard.

Il apparaît que les rendements journaliers suivent une loi très nettement différente de la gaussienne avec un caractère leptokurtique et asymétrique : la densité estimée est en effet nettement plus piquée que la gaussienne et légèrement décalée vers la droite (ce qui indique des queues négatives plus épaisses). Au fur et à mesure que l'intervalle d'observation des rendements augmente, ces caractéristiques s'estompent et la courbe tracée se rapproche lentement de la gaussienne. Ceci est très clair sur le tracé en semi-log qui montre nettement la convergence des queues positives tandis que les queues négatives semblent, elles, persister plus longtemps.

Une manière de quantifier plus précisément ces observations est de calculer la skewness et la kurtosis de ces séries (tableau 1.1). La skewness, définie comme le troisième cumulant

$$\kappa_3 = \frac{E[X - E(X)]^3}{[\text{Var} X]^{3/2}}$$

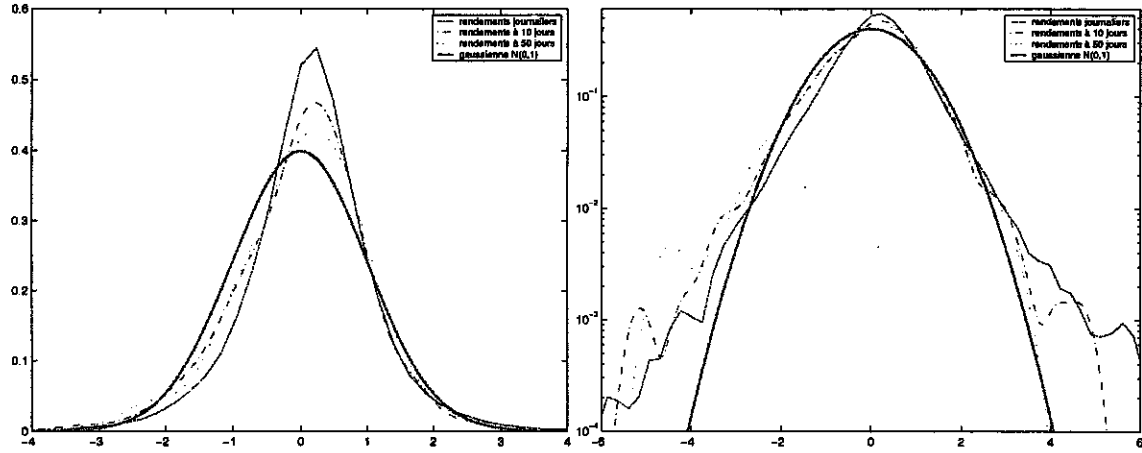


FIG. 1.4: Loi de distribution empirique, recentrée et renormalisée, des rendements journaliers, à 10 jours et à 50 jours du S&P500. Pour faciliter la comparaison nous avons également tracé la loi gaussienne standard. A droite le tracé en semi-log montre clairement la convergence des queues positives vers la gaussienne mais aussi une persistance plus forte des queues négatives.

mesure l'asymétrie de la série. La kurtosis, ou cumulants d'ordre 4, définie par

$$\kappa_4 = \frac{E[X - E(X)]^4}{[\text{Var} X]^2}$$

mesure la leptokurtocité de la série. Pour une variable gaussienne, la skewness est nulle et la kurtosis vaut 3. Une variable qui a un excès de kurtosis (on parle alors de leptokurtocité) a une distribution plus large que la gaussienne et est donc susceptible de donner naissance à des événements de plus grande amplitude.

Les résultats de la table 1.1 confortent la première impression donnée par la figure 1.4. Les

	Skewness	Kurtosis
rendements journaliers	-1.615	46.13
rendements à 10 jours	-0.297	4.86
rendements à 50 jours	-0.627	4.81
rendements à 100 jours	0.276	3.64

TAB. 1.1: Skewness et kurtosis pour différentes maturités des rendements.

rendements journaliers présentent un très fort excès de kurtosis qui décroît ensuite vers une valeur plus normale. Néanmoins cet excès semble très persistant car il décroît très peu entre 10 et 50 jours. L'asymétrie des rendements est également visible. Son comportement dans le temps est même plus surprenant : après avoir nettement décru entre un et dix jours, elle augmente entre dix et cinquante jours, puis rediminue. Evidemment l'estimation de quantités avec un horizon de cinquante jours se fait avec moins de données que l'estimation de

quantités journalières et la taille relativement faible de l'échantillon est peut être à l'origine d'incertitudes statistiques qui pourraient expliquer ce comportement.

Une dernière façon de tester, visuellement, l'adéquation ou non des rendements avec une distribution gaussienne est de faire une analyse des quantiles, en traçant les quantiles empiriques contre les quantiles d'une loi normale (*qq-plot*). Si les distributions sont identiques, le tracé doit être approximativement linéaire. Si au contraire elles sont différentes, on doit observer des déviations. Dans la figure 1.5, nous avons soumis à cette analyse les rendements pour plusieurs périodes. Le tracé pour les rendements journaliers cesse très vite d'être linéaire et présente de fortes déviations tant pour les queues positives que négatives. Ces déviations diminuent lorsque l'horizon des rendements augmente et le tracé se rapproche de la droite. Toutefois la situation est très différente pour les queues positives et les queues négatives. En effet dans la partie positive, le tracé devient réellement linéaire ce qui indique une bonne adéquation avec une hypothèse de normalité. Pour les queues négatives, la situation est moins claire. Certes les déviations diminuent mais elles le font lentement et restent considérables même au bout de cinquante jours. Ceci plaide en faveur de l'existence d'une asymétrie persistante dans les séries financières.

Les trois éléments d'étude que nous avons proposés (densité empirique, calcul des cumulants, tracé des quantiles) vont tous dans le même sens : les rendements journaliers sont fortement non gaussiens, avec l'existence d'un excès de kurtosis et d'une asymétrie. La kurtosis et l'asymétrie diminuent avec le temps sans toutefois jamais devenir négligeables et il est plus difficile de conclure sur la normalité ou non des rendements à ces horizons élevés. Des tests statistiques vont nous amener des éléments de réponse supplémentaires. Par exemple, les tests de Kolmogorov-Smirnov, de Jarque-Bera ou de Lillieford permettent de savoir si un échantillon est susceptible de suivre une loi normale. Le test de Kolmogorov-Smirnov compare la fonction de distribution cumulée empirique à la fonction de distribution cumulée F_0 de la loi testée (dans notre cas la loi normale). Le test de Jarque-Bera lui est basé sur la distribution de la skewness et la kurtosis empiriques et celui de Lilliefors est une version modifiée du test de Kolmogorov-Smirnov. Dans le tableau 1.2 nous donnons les p -valeurs² obtenues pour ces trois tests pour les différents rendements.³

	KS	BJ	Lil
rendements journaliers	$5.2 \cdot 10^{-44}$	0	(rejetée)
rendements à 10 jours	$3.96 \cdot 10^{-4}$	0	(rejetée)
rendements à 50 jours	0.347	$4.58 \cdot 10^{-11}$	0.0425
rendements à 100 jours	0.817	0.202	(acceptée)

TAB. 1.2: p -valeurs pour différents tests de normalité. Pour des maturités inférieures à 50 jours, la normalité est toujours rejetée.

Ces résultats vont dans le même sens que l'étude qualitative précédente. L'hypothèse de normalité pour les rendements quotidiens est très clairement rejetée par les trois tests. En

²La p -valeur d'un test statistique est la probabilité d'observer la valeur trouvée sous l'hypothèse testée. Si la p -valeur est inférieure au seuil de rejet (en général 5% ou 1%) l'hypothèse est rejetée, sinon elle est conservée.

³Si la p -valeur n'est pas disponible (impossible à calculer numériquement car trop grande ou trop faible), nous mettons simplement le résultat du test.

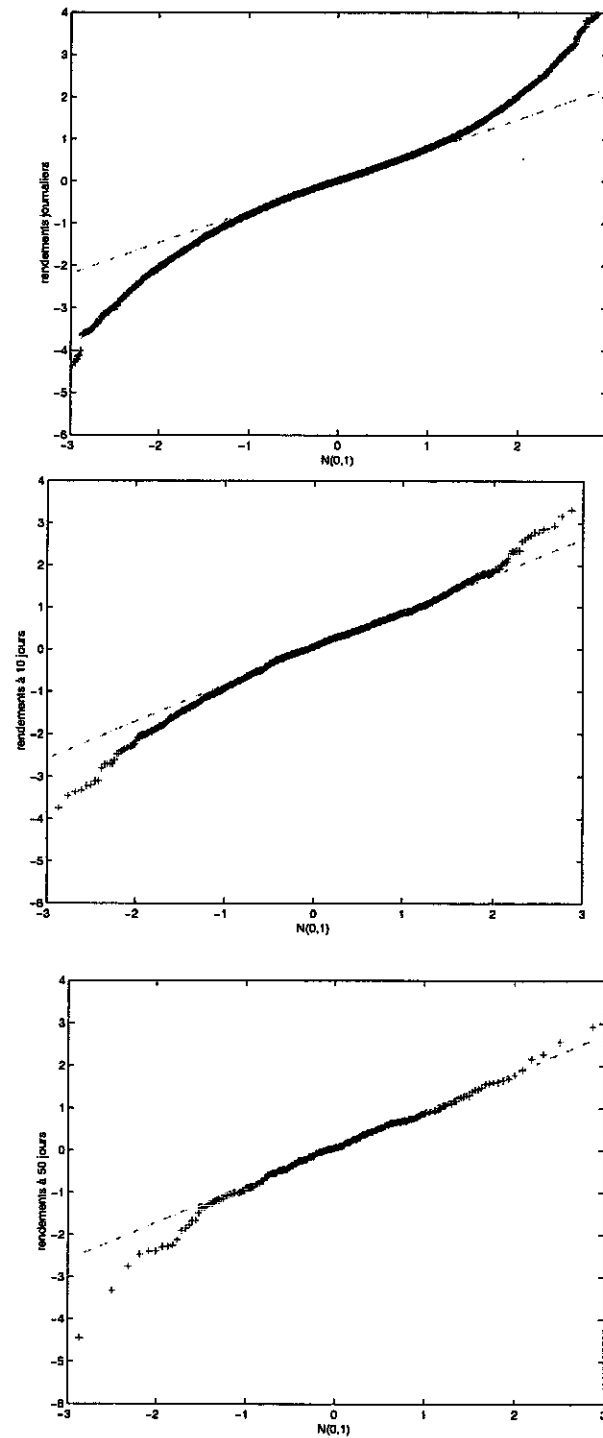


FIG. 1.5: qq -plot des rendements, recentrés et normalisés, journaliers (en haut), à 10 (au milieu) et à 50 jours (en bas) contre une loi normale standard. La déviation de la normalité, qui se traduit par un tracé non linéaire, est plus forte aux petites échelles et pour les queues négatives.

revanche, les trois tests acceptent l'hypothèse de normalité pour les rendements à 100 jours, et elle est également acceptée pour les rendements à 50 jours par le test de Kolmogorov-Smirnov avec une p -valeur significative. Toutefois, le moindre nombre de données disponibles ne permet pas d'être aussi affirmatif que dans le cas des rendements journaliers. En particulier, le test de Jarque-Bera est un test asymptotique qui n'est significatif que pour des séries de données suffisamment longues. De plus, la présence de corrélations dans les séries peut fausser ses résultats. Une étude plus précise, portant sur un nombre de cotations plus conséquent, est donc nécessaire pour être plus concluant. Nous présentons dans la section suivante des résultats répondant au moins partiellement à ces questions.

1.2.3 Etudes fines de la loi de distribution des cours financiers

Nous l'avons vu, une modélisation gaussienne des cours est très clairement imparfaite. Les premiers travaux à en souligner la limite ont été ceux de Mandelbrot [Man63] au début des années 60 sur les variations du prix du coton. Ce dernier a montré que les fluctuations de cette série s'écartaient sensiblement de la loi normale et présentaient des queues nettement plus épaisses. Par ailleurs, il constatait que la forme de la distribution changeait peu avec l'échelle d'observation des rendements⁴. Pour concilier ces deux observations, il proposait d'abandonner la modélisation classique par un mouvement brownien pour une modélisation par un processus de Lévy stable⁵. Une conséquence de ce choix est que tous les moments d'ordre supérieur ou égal à 2 des rendements sont formellement infinis. La plupart des travaux en finance supposant l'existence d'au moins un second moment, cela explique sans doute le peu d'enthousiasme qu'a suscité cette proposition. Par ailleurs, le caractère "exotique" du cours étudié et le faible nombre de données utilisées font qu'on peut raisonnablement douter de l'applicabilité directe de ces conclusions à des séries comme le S&P 500 et le débat a longtemps fait rage de savoir si les séries financières étaient ou non de variance finie [Off72, Pra72].

Grace à l'apparition de bases de données importante et l'augmentation de la puissance de calcul, des études récentes [PGA⁺99, GPA⁺99] ont permis de donner une description très précise de la distribution de plusieurs séries financières. Les auteurs ont analysé les rendements de deux types de données (actions et indices sur les marchés américains et japonais) et à des échelles de temps différentes (allant de la minute au mois), avec un intérêt tout particulier pour l'étude des queues de distribution, rendue possible grâce aux millions de données dont ils disposaient.

Actions Pour les données "intraday" (rendements de 1 minute à 1 jour), les auteurs trouvent que les queues de la distribution cumulée des rendements d'actions sont bien représentées par une loi puissance

$$P(r > x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

avec une valeur de α proche de 3,⁶ ce qui implique des moments finis jusqu'à un ordre proche de 3. Cette forme de distribution persiste jusqu'à une durée de l'ordre de 16 jours. Au delà,

⁴Nous reviendrons plus en détail sur cette propriété d'invariance dans le chapitre suivant.

⁵Voir chapitre suivant.

⁶La queue négative a un exposant légèrement inférieur, ce qui est en accord avec l'asymétrie observée précédemment.

un changement de régime s'opère. Dans sa partie positive, la distribution converge lentement vers une distribution gaussienne tandis que pour les queues négatives, la décroissance en loi puissance semble persister plus longtemps. Toutefois, plus l'horizon auquel l'incrément est observé augmente, plus le nombre de données disponibles diminue et les résultats obtenus sont donc plus sujets à caution.

Indices Les auteurs ont effectué la même étude avec des données provenant de l'indice S&P 500. Les résultats sont très similaires, à l'exception du changement de régime qui intervient plus tôt, au delà de 4 jours.

Analyse Notre étude empirique de l'indice S&P 500 voit ses résultats renforcés par ceux de [GPA⁺99]. Pour une large plage de temps, les rendements ne sont pas gaussiens, présentent une distribution asymétrique, à queue épaisse, la distribution cumulée décroissant selon une loi puissance d'exposant proche de 3. De plus, on observe au delà d'un seuil de quelques jours une convergence lente vers une distribution gaussienne.

Ces observations nous poussent à exclure une modélisation par loi stable puisque ces lois, à l'exception notable de la gaussienne, ont une fonction de distribution cumulée qui décroît selon une loi puissance mais avec un indice compris entre 0 et 2. Plusieurs modèles, plus en accord avec ces observations, ont été proposés dans la littérature faisant intervenir distribution de Student [BG74], distributions hyperboliques [EKP98, Rai00, CGMY03], normal inverse gaussien [BN98] ou hyperboliques généralisées [Rai00, CGMY03]. S'ils parviennent bien à reproduire la distribution des rendements à une échelle de temps donnée, ils sont en général incapables de les représenter simultanément pour chaque échelle de temps.

En effet le résultat le plus surprenant de [PGA⁺99, GPA⁺99] est la persistance sur une échelle de temps très grande (de une minute jusqu'à plusieurs jours) de la forme de la distribution des rendements.

Les rendements journaliers, ou mensuels, n'étant rien d'autre que la somme de rendements intraday (et donc leur convolution en cas d'indépendance), une modélisation par loi Lévy-stable permettrait de conserver la même forme pour chaque échelle de temps. Toutefois, l'exposant de décroissance trouvé, nettement supérieur à 2, nous a conduit à rejeter cette hypothèse : avec une telle valeur d'exposant la loi appartient en effet au bassin d'attraction de la gaussienne.

L'utilisation d'une loi de Lévy tronquée [MBLM02, Kop95] a été également proposée. Une telle loi est non stable et a tous ses moments finis mais ses convolutions successives convergent extrêmement (et même arbitrairement) lentement vers la gaussienne. En conséquence, utilisée comme modèle pour les rendements, elle pourrait être à l'origine d'une invariance de forme apparente sur une échelle de temps finie et expliquer ainsi le changement de régime vers la gaussienne qui ne s'effectue qu'à temps long. Toutefois sa distribution cumulée décroît dans les queues comme

$$P(r > x) \sim \frac{e^{-\lambda x}}{x^\alpha}$$

qui n'est pas exactement le comportement observé sur les données.

Une dernière explication de cette invariance partielle de forme et de la très lente convergence vers la gaussienne est la présence de fortes corrélations dans les séries financières. Celles-

ci empêcheraient le théorème de la limite centrale de s'appliquer et expliqueraient que les rendements journaliers aient gardé une loi comparable à celle des rendements intraday.

1.3 Etude de la structure de dépendance

1.3.1 Corrélations linéaires

il est donc naturel de s'intéresser maintenant à la fonction d'autocovariance de la série des rendements

$$\gamma(h) = \text{Cov}(r(t, \Delta t), r(t + h, \Delta t))$$

Nous l'avons représentée pour notre série du S&P 500 sur la figure 1.6 en choisissant la convention $\gamma(0) = 1$. Sur ce tracé, elle décroît extrêmement rapidement avec h et peut être

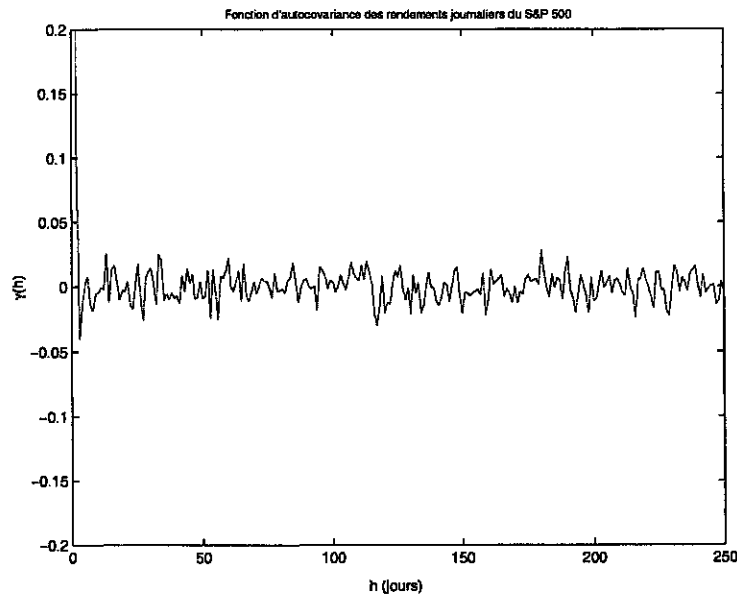


FIG. 1.6: Fonction d'autocovariance des rendements. Ceux ci apparaissent clairement décorrélés.

significativement considérée comme nulle dès que h est différent de 0. Les études de cette fonction d'autocorrélation sur des données intraday, montre qu'elle décroît exponentiellement vite avec le temps et peut être considérée comme nulle dès que h est supérieur à 15 minutes, temps au delà duquel les effets de microstructure deviennent négligeables.

La justification la plus fréquente de cette absence de corrélations invoque le principe d'efficience des marchés. Si de telles corrélations, faciles à détecter, existaient, il serait aisé pour un intervenant de concevoir une stratégie qui *en moyenne* lui permettrait de gagner de l'argent (c'est grossièrement le principe de l'arbitrage statistique). Or la mise en œuvre de ces stratégies devrait éliminer mécaniquement ces corrélations, au moins pour des temps supérieurs au temps de réaction du marché (typiquement de l'ordre de quelques minutes), pour revenir à l'équilibre. Néanmoins ce type d'arguments mérite sans doute un examen plus approfondi

car des subtilités existent [WB03]. Par exemple, dans sa forme la plus simple, le mécanisme précédent n'explique pas comment disparaissent les corrélations positives : celles-ci devraient en effet pousser les intervenants à acheter lorsque les prix montent et à vendre lorsque les prix baissent, renforçant dans les deux cas la tendance initiale.

1.3.2 Corrélations non linéaires

L'absence de corrélations linéaires mise en évidence précédemment n'entraîne pas nécessairement l'indépendance des rendements. En effet, des fonctions non linéaires des rendements, comme leur valeur absolue ou leur carré, peuvent présenter des corrélations non nulles. Ainsi nous avons tracé sur la figure 1.7 la fonction d'autocovariance des valeurs absolues des rendements

$$\gamma_a(h) = \text{Cov}(|r(t, \Delta t)|, |r(t + h, \Delta t)|)$$

Contrairement à la fonction d'autocovariance précédente, celle ci reste très longtemps signi-

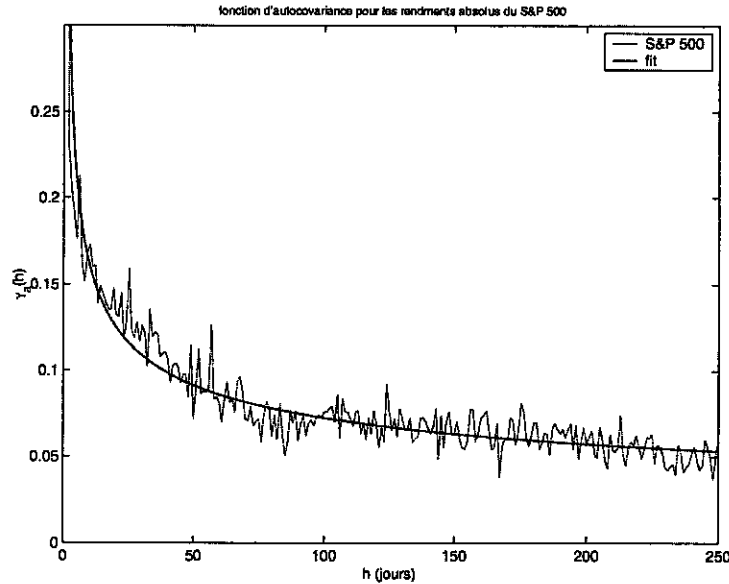


FIG. 1.7: Contrairement aux rendements, les rendements absolus apparaissent fortement corrélés. Les rendements sont donc décorrélés mais ne sont pas indépendants. La fonction d'autocovariance est bien approximée par une loi puissance.

ficativement positive et indique donc l'existence d'une dépendance entre les rendements. Une régression log-log de cette fonction d'autocovariance contre le temps indique qu'elle est bien approximée par une loi puissance comme le montre le tracé sur la figure 1.7

$$\gamma_a(h) \simeq \frac{0.33}{h^{0.33}}$$

Une telle fonction a la propriété de ne pas présenter d'échelle caractéristique : les corrélations ne possèdent donc pas de durée typique au delà de laquelle elles décroîtraient rapidement. Une autre façon de le voir est qu'il est impossible de décrire correctement ces corrélations par

une fonction exponentielle comme le montre la figure 1.8.

La même étude effectuée sur des données différentes (indice intraday par exemple [CPB97])

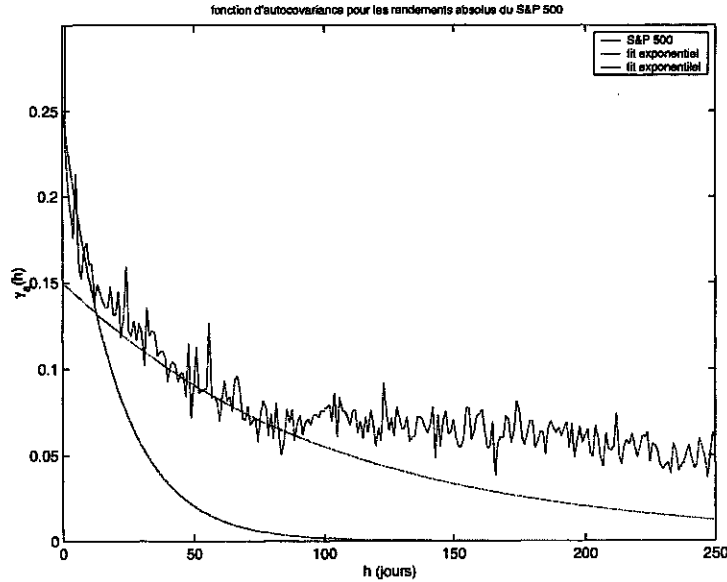


FIG. 1.8: Il est impossible de décrire correctement la fonction d'autocovariance des rendements absolus par une simple fonction exponentielle. Nous avons représenté deux "fits" exponentiels possibles, mais ceux-ci ne restent valides que sur une plage de temps très limitée.

conduit à des résultats comparables : la fonction de corrélation des valeurs absolues est toujours significativement non nulle, décroît lentement et peut être bien représentée par une fonction du type

$$\gamma_a(h) \simeq \frac{K}{h^\alpha}$$

avec α entre 0.2 et 0.4 suivant les études [MDD⁺95, CPB97, PS00]. La faible valeur de l'exposant α se traduit par une décroissance très lente des corrélations, qui ne sont même plus sommables

$$\sum_h \gamma_a(h) = +\infty$$

On parle dans ce cas de corrélations à longue portée [Ber94]. Leur existence conduit à des problèmes délicats de statistique et la plupart des résultats classiques ne peuvent plus s'appliquer simplement. En particulier le comportement d'une somme de variables ainsi corrélées n'obéit plus en général au théorème de la limite centrale classique [Ros61, DM79, Taq79, GS85]. Dans notre cas, où les corrélations se situent au niveau de la valeur absolue, ceci peut en particulier expliquer la lente convergence de la distribution des rendements vers la gaussienne observée précédemment.

Un test simple pour se convaincre de l'importance des corrélations et vérifier que les résultats observés précédemment ne sont pas simplement créés par d'autres effets (en particulier par une distribution large des rendements) est d'étudier la même fonction de corrélation, mais

pour une série de rendements mélangée, pour laquelle toutes les dépendances ont été éliminées. C'est ce que nous avons représenté sur la figure 1.9 et, comme on peut le constater, la figure obtenue plaide très nettement en faveur de cette version et constitue donc un indice supplémentaire pour l'existence de fortes dépendances dans les séries financières. La présence

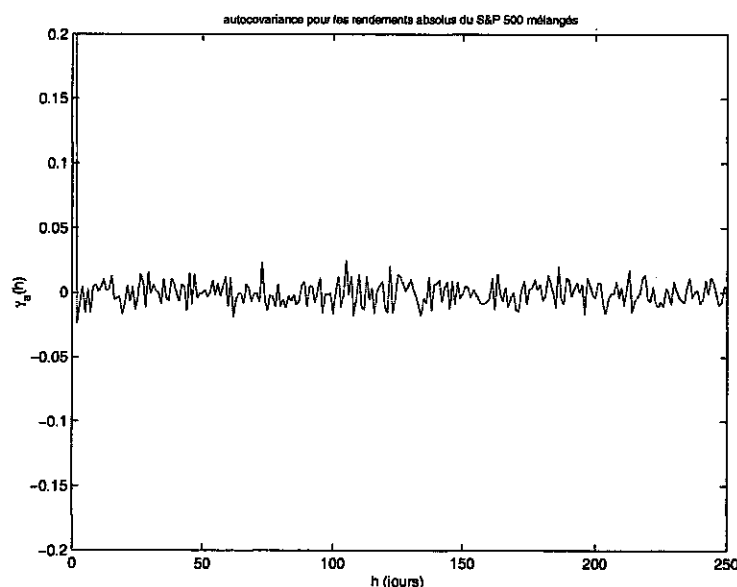


FIG. 1.9: Fonction d'autocovariance pour les rendements absolus mélangés. La figure est très différente de la précédente, ce qui semble indiquer le caractère fondamental des corrélations.

de longue mémoire dans les séries financières est maintenant couramment admise dans une vaste partie de la littérature [Lo91, DC96, DGE93, Pag96, DLC94] même son origine reste une question des plus complexes.

Une critique de la longue mémoire Certains auteurs [MS00b] restent toutefois perplexes et mettent en garde contre la certitude de la présence de longue mémoire dans les séries financières. Selon eux, elle pourrait n'être qu'un artefact qui trouverait sa cause dans d'autres facteurs.

Tout d'abord, certaines des quantités que nous calculons et dont nous nous servons pour conclure quant à l'existence de longue mémoire peuvent être mal définies, au moins numériquement. En effet, la distribution des rendements présente, nous le savons, des queues épaisses avec un exposant autour de 3. Cela signifie en particulier que le quatrième moment de cette série est formellement infini. En conséquence, les intervalles de confiance pour les fonctions d'autocorrélation s'en trouvent très grandement élargis par rapport au cas standard gaussien et risquent de perdre ainsi toute signification pratique [DM98].

Par ailleurs, la non stationnarité des séries étudiées pourraient donner lieu à une apparence de longue mémoire [MS00b]. Comme nous l'avons déjà souligné, rien ne garantit a priori la stationnarité des séries étudiées. Pour illustrer ce risque, Mikosch propose l'exemple suivant. Il simule indépendamment deux séries de processus GARCH avec des caractéristiques bien

distinctes. Chacune de ces séries a des corrélations qui décroissent exponentiellement vite et ne présente donc pas de longue mémoire, ce qui est confirmé par le tracé des fonctions d'autovariance. Pourtant, la série obtenue en mettant bout à bout les deux premières présente elle très clairement les "symptômes" de la longue mémoire. Le calcul théorique prédit même une fonction d'autocovariance qui devrait se stabiliser autour d'une valeur fixe!

Ces observations, et tout particulièrement la seconde, doivent nous pousser à rester très vigilant quant à l'interprétation des différentes grandeurs calculées sur les données dont le caractère complexe peut fausser beaucoup de résultats. Toutefois, la situation n'est sans doute pas aussi inquiétante que la décrit Mikosch. En effet, si les séries sont non-stationnaires, elles le sont sans doute moins brutalement que dans l'exemple (extrême!) précédent. Il faut également garder en tête que nous cherchons à modéliser un phénomène complexe. Il est donc pratiquement inespéré que notre modèle reproduise exactement la réalité dans tous ses aspects, mais nous pouvons lui demander de la refléter le mieux possible et à un moindre coût. Autrement dit, si, en pratique, un modèle stationnaire donne une bonne image de la réalité (qui elle n'est peut être pas stationnaire) nous devons, modestement, le conserver.

Volatility clustering L'existence de fortes corrélations non linéaires se traduit par un comportement intermittent des rendements, phénomène plus connu chez les praticiens sous le nom de "volatility clustering". Nous l'avons déjà évoqué un peu plus tôt, les rendements du S&P 500 ont une allure bien différente des rendements d'une chronique gaussienne (figures 1.1 et 1.3). Autant le hasard gaussien semble régulier, presque sans surprise, autant le hasard d'une chronique boursière paraît sauvage et fluctuant. Le marché n'évolue que par bouffées : aux accès de fièvre des périodes de grande activité succèdent des zones de calme plat pendant lesquelles les cours varient très peu. Ce regroupement par paquets ("clustering") est entièrement dû aux corrélations des séries financières. A cause de celles ci, un grand mouvement, correspondant à une forte volatilité, a des chances d'être suivi par un mouvement de même ampleur (mais pas nécessairement dans le même sens), de même pour un mouvement de faible amplitude. Ceci est très visible sur la figure 1.2 où l'on voit clairement que les fortes variations se rassemblent en paquets correspondant à des accès de fièvre des marchés. Par ailleurs, à cause de l'absence d'échelle caractéristique dans ces corrélations, ces périodes de forte ou faible volatilité n'ont pas non plus de longueur typique : elles peuvent, à priori, durer arbitrairement longtemps comme cesser presque immédiatement.

1.3.3 Quelques modèles

La dichotomie entre la décorrélation des rendements et la présence de structures de dépendance non linéaires a naturellement conduit à une classe de modèles où les rendements s'écrivent comme le produit de deux variables aléatoires

$$r(t) = \epsilon(t)\sigma(t)$$

Le processus $\epsilon(t)$, qui va déterminer le signe de l'incrément, est un bruit blanc, éventuellement non gaussien, qui assure la décorrélation des rendements. Le processus $\sigma(t)$ va lui gouverner la volatilité, l'amplitude des rendements et, à travers lui, toute la complexité de la structure de dépendance.

Processus ARCH Parmi la classe de modélisation proposée plus haut, la plus connue est celle par processus ARCH (Auto Regressive Conditional Heteroskedastic), introduits par Engle [Eng82] en 1982⁷

$$\begin{aligned} r_t &= \epsilon_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i}^2 \end{aligned}$$

où ϵ_t est un bruit blanc gaussien.

La seule source d'aléa dans ce modèle vient de l'innovation ϵ_t tandis que la volatilité est entièrement déterminée par les rendements passés. Il est facile de comprendre intuitivement pourquoi un tel processus est susceptible d'engendrer de manière intermittente des périodes de fortes activités. En effet si à un temps t , par chance, le rendement est élevé, l'équation précédente nous montre que cela se répercute sur la volatilité qui à son tour est susceptible d'être élevée, entraînant avec elle une hausse en valeur absolue des prochains rendements, etc. Un des principaux intérêts de ce type de modèles est leur facilité à être estimés. En pratique toutefois, ils ont parfois du mal à se calibrer sur des données réelles et le nombre de paramètres α_i nécessaires est souvent trop important. Pour contrer cette faiblesse, Bollerslev [Bol86] et Taylor [Tay86] proposèrent indépendamment l'un de l'autre une extension, les processus GARCH(p,q) (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedastic)

$$\begin{aligned} r_t &= \epsilon_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

qui comptent parmi les modèles les plus populaires en finance.

Il est possible de montrer en utilisant des résultats de Kesten [Kes73] et Goldie [Gol91] que leurs queues de distribution suivent une loi de Pareto ce qui permettrait de reproduire la leptokurtocité observée des rendements. Toutefois, les valeurs estimées des paramètres conduisent souvent à des queues notablement plus épaisses que celles observées sur les marchés. D'autres restrictions existent. Ainsi, les conditions sous laquelle ces processus sont stationnaires restent mal connues [Nel90, BP92] et en pratique les paramètres α_i et β_j demeurent peu stables dans le temps. Les processus GARCH sont donc mal adaptés à la modélisation de longues séries. Par ailleurs ils ne résolvent que partiellement le problème de la dépendance observée dans les séries financières. En effet ils présentent des corrélations à faible portée, qui décroissent exponentiellement avec le temps et sont donc incapables de reproduire le phénomène de mémoire longue.

Pour tenter de résoudre ces imperfections, de nombreuses généralisations (certains avancent le chiffre de 150...) plus ou moins ad-hoc et sophistiquées ont été proposées : IGARCH [EB86], FIGARCH [BBM96], EGARCH [Nel91], LM-ARCH [DC96]. L'inconvénient de la majorité de ces extensions est le manque de fondements théoriques (dans la plupart des cas on ne sait pas si les processus construits sont stationnaires) ce qui se traduit inévitablement par des difficultés numériques en pratique.

⁷Pour ces travaux, Engle a reçu en octobre 2003 le prix Nobel d'économie, qu'il partage avec Granger.

Modèles à volatilité stochastique D'autres approches que celle des processus ARCH ont été proposées comme par exemple les modèles à volatilité stochastique. Le plus souvent σ_t y est écrit sous une forme exponentielle

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 \exp(h_t)$$

Le modèle le plus simple est ensuite de supposer une dynamique autorégressive pour h_t ⁸ [Tay86, GHR96, Tay94]

$$\begin{aligned} r_t &= \epsilon_t \sigma_t \\ h_t &= \phi h_{t-1} + \lambda \eta_t \end{aligned}$$

avec $\phi \in [0, 1]$ afin d'assurer la stationnarité du processus. Les bruits ϵ_t et η_t sont, dans la formulation la plus simple du modèle, des bruits blancs gaussiens, indépendants l'un de l'autre. Relaxer ces hypothèses permet d'obtenir des extensions intéressantes. Ainsi supposer que ϵ_t suit une loi plus large que la gaussienne permet augmenter la leptokurtocité des rendements, corréler ϵ_t et η_t introduit de l'asymétrie dans le processus, etc.

A la grande différence de la classe des processus ARCH, il existe deux sources d'aléa dans un modèle à volatilité stochastique, ϵ_t et η_t . En conséquence, ces modèles sont considérablement plus difficiles à estimer que les processus ARCH ce qui a longtemps été un frein à leur utilisation pratique. Récemment de nouvelles méthodes d'estimation sont apparues qui les rendent plus compétitifs [FH98, SK98].

Même dans le cas le plus simple où les deux innovations sont gaussiennes et indépendantes, ces processus sont distribués selon une loi large. Par exemple la kurtosis d'un tel modèle peut être calculée explicitement

$$\kappa_3 = 3 \exp \left(\frac{\lambda^2}{1 - \phi^2} \right)$$

et elle est toujours supérieur à 3.

Les modèles à volatilité stochastique sont également très populaires, en particulier lorsqu'ils sont utilisés sous leur version continue pour la valorisation d'options

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ d\sigma_t &= a(\sigma_t) dt + \theta(\sigma_t) d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

Plusieurs dynamiques ont été proposées pour la volatilité. Par exemple Wiggins [Wig87] et Scott [Sco87] suggèrent un modèle d'Ornstein-Uhlenbeck

$$d \ln \sigma_t = \kappa(\nu - \ln \sigma_t) dt + \theta \sigma_t d\tilde{W}_t$$

tandis que Heston, sans doute le nom le plus connu dans les modèles à volatilité stochastique, propose un processus en "racine carrée"

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\nu - \sigma_t^2) dt + \theta \sigma_t d\tilde{W}_t$$

Les mouvements browniens W_t et \tilde{W}_t peuvent être corrélés pour introduire de l'asymétrie. Comme leur analogue en temps discret, ces processus possèdent des queues épaisses, qui

⁸dans la littérature le terme consacré est "Autoregressive Random Variance models"

peuvent encore être alourdies si le processus W_t est remplacé par un processus de Lévy plus général [BNS01].

Le principal élément raté avec cette modélisation reste la longue mémoire présente dans les cours financiers. Des extensions faisant appel à la dérivation fractionnaire [GJ80] ou au mouvement brownien fractionnaire [CR96] ont bien été proposées mais aucune ne s'est véritablement imposée.

1.4 Asymétrie

Une autre des caractéristiques essentielles des marchés financiers est leur asymétrie. Ce terme regroupe cependant plusieurs réalités que nous voulons détailler un peu.

L'asymétrie la plus immédiate et la plus simple à mettre en évidence est celle des rendements eux mêmes : les queues négatives sont en général plus épaisses que les queues positives. Le cumul d'ordre 3, la skewness, permet de quantifier cette asymétrie. Sur notre série du S&P 500, elle est significativement négative et persistante. On observe la même chose sur beaucoup d'autres actifs financiers [Pag96, Con01]. En conséquence, comme on peut le voir sur la figure 1.4, le maximum de la densité empirique des rendements standardisés n'est pas centré sur 0, mais décalé vers la droite.

Une autre asymétrie, plus subtile car à la fois en espace et en temps, est connue sous le nom de "leverage effect" [Bla76] : la volatilité future est négativement corrélée avec les rendements passés, mais les rendements futurs eux restent décorrélés de la volatilité passée. Cette dernière observation semble assez intuitive : s'il n'en était pas ainsi, il serait facile, à partir d'estimations de la volatilité passée, de construire des stratégies d'arbitrage statistique qui violeraient l'hypothèse, même affaiblie, d'efficience des marchés. Black donne une explication économique à la première observation : une entreprise dont le cours baisse est plus susceptible de faire faillite, elle apparaît donc plus risquée et sa volatilité augmente. Il n'y a cependant pas consensus autour de la question et d'autres avancent des arguments opposés [BW00]. Par ailleurs, autant les corrélations de la volatilités sont largement documentées, autant les études empiriques qui se sont intéressées aux corrélations rendements-volatilité sont peu nombreuses. Récemment, Bouchaud et al [BMP01] se sont penchés sur ce problème. Ils ont étudiés la fonction de leverage

$$\mathcal{L}(i, j) = \frac{E[\delta X_i \delta X_j^2]}{(E[\delta X_k^2])^2} \quad i < j$$

pour plusieurs actions et indices. Nous avons reproduit les résultats pour les actions, tirés de [BMP01], sur la figure 1.10. Empiriquement, cette fonction, pour les actions, peut être bien reproduite par une fonction exponentielle. Les auteurs présentent ensuite un modèle qui permettrait d'expliquer le phénomène. Selon eux, cette asymétrie n'aurait pas d'origine économique mais apparaîtrait mécaniquement, par le simple retard des agents à prendre en compte les niveaux de prix. Plutôt qu'un cours "actuel", [BMP01] propose d'utiliser une valeur "retardée", moyenne des valeurs passées sur une échelle de temps plus ou moins grande, ce qui engendrerait une corrélation négative. Leur modèle, qui interpole entre les paradigmes additif et multiplicatif, prédit pour cette corrélation une forme exponentielle, compatible avec les

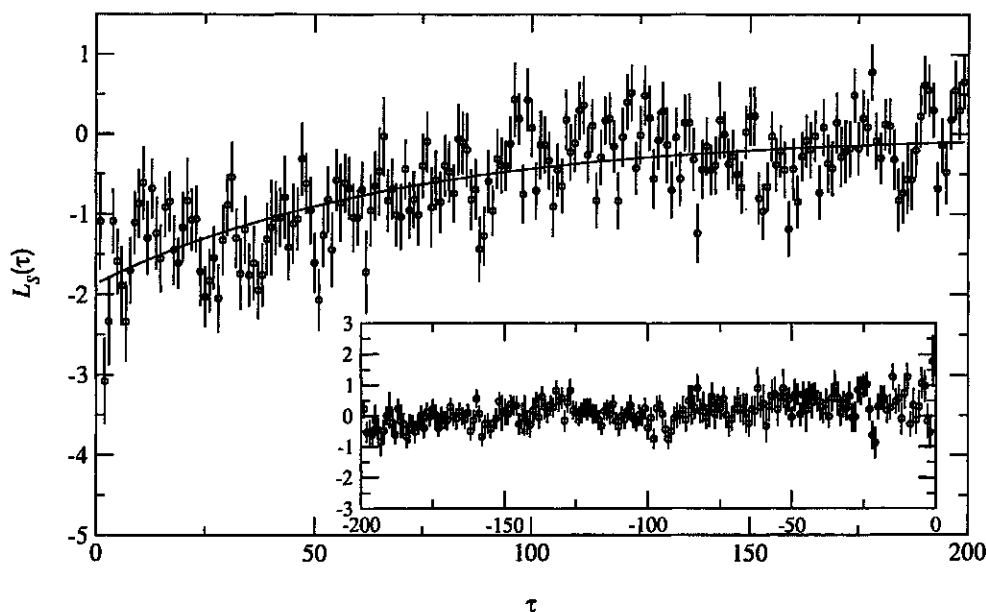


FIG. 1.10: La fonction tracée représente la corrélation pour les actions entre les rendements passés et les volatilités futures. Celle-ci est nettement négative, tandis que la même fonction calculée entre volatilités passées et rendements futurs est à peu près nulle (encart). L'effet est plus marqué dans le cas des indices.

niveaux observés sur le marché. Pour les indices, la situation est différente. L'effet de leverage semble à la fois plus important mais décroît aussi beaucoup plus vite. Les auteurs pensent que des effets de panique sur les marchés peuvent toucher les indices financiers, à propos desquels l'information est la plus vite transmise, et être à l'origine de cette asymétrie plus forte. Notons que cet effet leverage entraîne une asymétrie des rendements. Considérons par exemple le cas simple de rendements donnés par

$$r = \sum_{i=1}^N \eta_i$$

où les η_i sont des variables aléatoires symétriques, décorrélées, mais vérifiant $E(\eta_i \eta_j^2) = -\alpha(j-i) < 0$ si $i < j$ et $E(\eta_i \eta_j^2) = 0$ si $i \geq j$ (effet leverage). On a alors

$$\begin{aligned} E(r^3) &= E\left(\sum_{i=1}^N \eta_i\right)^3 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} E(\eta_i \eta_j^2) \\ &= -\sum_{k=1}^{N-1} (N-k)\alpha(k) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Enfin une dernière asymétrie, l'effet "HARCH", a été mise en évidence dans [MDD⁺95, MDD⁺97, ZL01] (voir également [AMS98] pour une approche différente du même phénomène) : les volatilités passées à grande échelle prédisent mieux les volatilités futures à petite échelle que l'inverse.

Dans [MDD⁺97, ZL01] les auteurs avancent une explication de ce phénomène, corroborée par [AMS98]. L'hétérogénéité des marchés qui voient se rencontrer des agents aux horizons d'intérêt très différents pourrait être à l'origine de cette asymétrie. En effet, les intervenants spéculant à très court terme cherchent à évaluer le marché avec une grande fréquence mais avec une mémoire relativement limitée. A l'inverse, d'autres cherchent à se protéger à long terme, contre les tendances générales. Ainsi une baisse de 0.5% des cours est un événement beaucoup plus important pour le premier groupe que pour le second. Mais les traders à court terme, sensibles à toute information, réagissent plus aux positions des traders à long terme que l'inverse, d'où l'apparition d'une asymétrie.

Les auteurs de [MDD⁺97, ZL01] proposent un nouveau modèle pour incorporer cet effet, le processus HARCH (Heterogeneous ARCH) qui incorpore cette idée de plusieurs composantes dans le marché avec des perceptions différentes

$$r_t = \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\sum_{j=1}^i r_{t-j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_t$$

[ESDM96] étudie les conditions sous lesquelles ce processus est stationnaire et admet des moments finis.

1.5 Corrélations entre séries financières

Un dernier point bien connu, mais que nous aborderons peu dans la suite, est l'existence de corrélations entre séries financières. Ceci ne doit guère nous étonner puisqu'on se doute bien que, par exemple, les cours de Peugeot et Renault sont sensibles aux mêmes facteurs économiques.

Ces corrélations expliquent d'ailleurs que actions et indices aient une loi de distribution très comparables. En effet en cas d'indépendance des séries, l'indice, qui est une moyenne des cours des actions qui le composent, devrait avoir une distribution qui se rapproche de la gaussienne en vertu du théorème de la limite centrale. L'existence de dépendances ralentit cette convergence.

Si l'existence de corrélations ne fait pas de doute, les estimer reste une tâche difficile. Il a été montré dans [LCBP99, LCPB99, PGR⁺99] que les matrices de covariance estimées grâce aux données de marchés semblent contenir très peu d'informations et beaucoup de bruit : pour une large part, elles sont distribuées comme des matrices aléatoires [Meh91]. Ceci a d'importantes conséquences pratiques car ces matrices de corrélations sont très souvent utilisées en gestion de portefeuille ou en gestion des risques pour le calcul de la VaR. Par ailleurs, l'utilisation de corrélations supporte implicitement une vision gaussienne, largement erronée, du monde financier. Dans cette perspective, des mesures de dépendances plus générales connaissent actuellement un grand succès avec notamment la théorie des copules [BDN⁺00, Nel99].

1.6 Conclusion

D'un point de vue statistique les séries financières sont donc des objets complexes, qui possèdent nombre de propriétés aujourd'hui bien connues et résumées sous le nom de "faits stylisés". Les rendements sont décorrélés sans être pour autant indépendants. Leur volatilité exhibe en effet des dépendances à longue portée qui rendent non triviales les propriétés d'agrégation temporelle des rendements. En particulier, ils sont distribués selon une loi asymétrique, plus large que la gaussienne, avec des queues parétiennes d'exposant 3 et qui persiste sur une large échelle de temps.

Assez étrangement ces propriétés semblent vérifiées sur la plupart des marchés suffisamment liquides (actions, indices, change), ce qui laisse penser que des mécanismes sous jacents communs pourraient régir leur fonctionnement. A l'interface de l'économie, des mathématiques et de la physique se développent actuellement des recherches sur des modèles simples de marchés [Lux98, GB03, KT02, Hor01] visant à reproduire les caractéristiques observées empiriquement, avec le but ultime de mieux maîtriser le comportement d'un marché financier.

Les modélisations classiques (processus ARCH, à volatilité stochastique, de Lévy) ne rendent compte que partiellement des propriétés que nous venons de décrire. C'est pourquoi nous présentons une autre classe de processus qui permettrait de combler ces lacunes, les processus multifractals.

Chapitre 2

Processus multifractals et finance

L'étude des processus multifractals trouve son origine dans les travaux de Mandelbrot [Man82] et a trouvé un champ d'application originel particulièrement fertile, l'analyse de la turbulence développée [Fri95]. Rendue populaire par les physiciens [FP83, HJK⁺86], l'utilisation de processus multifractals s'est largement développée et, comme le confirme une simple requête sur google, elle s'est imposée dans de nombreux autres domaines : géophysique [Man89], climatologie [MSL96], traitement d'images [Tp00], étude de trafic internet [LTWW94, RCRB99], finance [Eve95, Man88, MDB00], etc. On le voit, les riches propriétés de ces processus en font des candidats idéaux à la modélisation de multiples phénomènes complexes. Sur un plan plus théorique, ils ont également intéressé les mathématiciens et leur étude rigoureuse est devenue un sujet particulièrement ardu [Jaf97a, Jaf97b].

Dans ce chapitre, nous présentons de manière simple et relativement intuitive les processus multifractals en nous appuyant sur la notion d'invariance d'échelle. Nous présentons également les principaux outils utilisés dans le domaine et insistons sur leur utilisation en finance.

2.1 Invariance d'échelle

On dit qu'un phénomène présente une invariance d'échelle lorsqu'aucune échelle (de temps ou d'espace) n'est privilégiée, la même structure s'observant de près ou de loin. En pratique une telle propriété ne s'étend pas à l'infini mais se trouve le plus souvent vérifiée sur un domaine d'échelles fini mais suffisamment grand. Un exemple simple peut nous être donné par un nuage, où les motifs semblent se répéter à l'infini. Lorsque nous regardons une photo d'un nuage, il est en effet impossible de dire si le détail qui nous intéresse mesure un mètre ou un kilomètre : c'est un peu "[examiner] une carte sans échelle".¹

L'invariance d'échelle est le plus souvent associée à l'existence de lois puissance, ce qui peut se justifier par l'argument dimensionnel suivant. Si une fonction f présente une invariance d'échelle, il est naturel que le rapport de ses valeurs prises en deux points ne dépende que du rapport de ces deux points :

$$\frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} = F\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$$

¹ tiré de *Fractales, Hasard et Finance* par Benoît Mandelbrot.

On en déduit que

$$F\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) F\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) = F\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)$$

soit plus généralement

$$F(uv) = F(u)F(v)$$

ce qui implique, sous des conditions raisonnables, que F , et par conséquent f , suit une loi puissance

$$f(u) = \frac{C}{u^\nu}$$

Remarquons que les lois puissance sont reconnues et utilisées en économie depuis plus d'un siècle, lorsque Pareto, étudiant la répartition des richesses, montra que la fraction $f(x)$ de personnes possédant un revenu supérieur ou égal à x suivait asymptotiquement une loi puissance (ou loi de Pareto) d'indice environ égal à 1.5 :

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

Plus récemment a été mise en évidence l'importance des distributions parétiennes en finance où elles semblent gouverner asymptotiquement la distribution des rendements des actifs (voir le chapitre précédent).

Plus fondamentalement elles ont acquis une place centrale en physique statistique dans l'étude des phénomènes critiques. En effet les systèmes autour de leur état critique (percolation, transitions de phase dans des réseaux de spins) exhibent des grandeurs dont le comportement est décrit par des lois puissance [Sta71, Gol92]. Le calcul explicite des exposants de ces lois a été rendu possible grâce à la théorie de la renormalisation [Les96, Gol92], profondément reliée aux théorèmes limites en probabilité [JL75, CJL78, Sin76, Dob80]. Dans ce domaine, l'application de ces idées a donné naissance à la vaste classe des processus auto-similaires et, plus généralement, aux processus fractals.

2.2 Processus auto-similaires

2.2.1 Définitions

DÉFINITION 2.2.1 (PROCESSUS AUTO-SIMILAIRES)

Un processus $(X(t), t \in T)$ est dit auto-similaire ("self-similar") d'indice $H > 0$ [EM00] si pour tout $a > 0$ on a l'égalité en loi

$$(X(at), t \in T) \stackrel{d}{=} (a^H X(t), t \in T)$$

Un théorème de Lamperti [Lam62] assure qu'un tel H , lorsqu'il existe, est unique. Par ailleurs, une conséquence immédiate de la définition est qu'un processus auto-similaire vérifie nécessairement la condition $X(0) = 0$ p.s.

Un processus auto-similaire est donc un objet statistiquement invariant par un changement approprié de temps et d'échelle, le paramètre H reliant ces deux changements. Graphiquement, cela signifie qu'une portion de courbe correctement renormalisée aura la même allure générale que la courbe toute entière, sans toutefois lui être strictement identique puisque l'égalité n'est que statistique (voir la figure 2.1) .

Stationnarité Un processus auto-similaire non dégénéré n'est jamais stationnaire. En effet, si c'était vrai, on aurait la suite d'égalités en loi

$$X(t) \stackrel{d}{=} X(at + (1-a)t) \stackrel{d}{=} X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t)$$

qui conduit à une contradiction lorsque $a \rightarrow +\infty$.

Un lien existe toutefois entre processus auto-similaires et processus stationnaires [TS94] et il est donné par la transformation de Lamperti

$$X(t) \text{ auto-similaire d'indice } H \iff Y(t) \equiv e^{-tH} X(e^t) \text{ stationnaire}$$

Les accroissements eux peuvent être stationnaires (c'est le cas par exemple du mouvement brownien), propriété agréable dans les applications pratiques.

L'importance de ces processus a été mise en évidence par Lamperti [Lam62] qui a montré leur rôle central dans les théorèmes limites.

2.2.2 Exemples

Mouvement brownien L'exemple le plus connu parmi les processus auto-similaires est le mouvement brownien standard $B(t)$ [KS88, RY91] qui est auto-similaire d'indice $H = 1/2$. Dans la figure 2.1 nous avons représenté une réalisation d'un mouvement brownien $B(t)$. Pour illustrer la propriété d'autosimilarité, nous avons également tracé le processus renormalisé $B'(t) = 2B(t/4)$. On le constate aisément : les deux tracés possèdent la même allure générale. A cause de ses caractéristiques très spécifiques (essentiellement l'indépendance et la gaussianité de ses incréments), ce processus est le cas non trivial le plus simple de processus auto-similaires et en constitue la référence, la norme. En particulier, une loi d'échelle avec un paramètre H différent de $1/2$ sera qualifiée d'*anormale* ou *anomale*. Ces déviations peuvent provenir de deux causes différentes, éventuellement combinées : soit des incréments distribués selon une loi plus large que la gaussienne (c'est le cas des processus de Lévy α -stable), soit l'existence de fortes corrélations entre les incréments (cas du mouvement brownien fractionnaire).

Processus de Lévy α -stable Les lois stables sont une généralisation de la loi gaussienne et ont été particulièrement étudiées par A.Y. Khinchine et P. Lévy [Lév37, TS94, Tsa97] dans les années 1920-1930.

DÉFINITION 2.2.2 (LOI STABLE)

Une variable aléatoire X suit une loi stable si pour tout $a, b > 0$, il existe $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d \tag{2.1}$$

avec X_1 et X_2 des copies indépendantes de X . Lorsque de plus $d = 0$, on parle de variable strictement stable.

En fait les constantes a, b, c ne sont pas quelconques. En effet, on peut prouver[Fel71] qu'il existe $\alpha \in]0, 2]$ tel que

$$c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$$

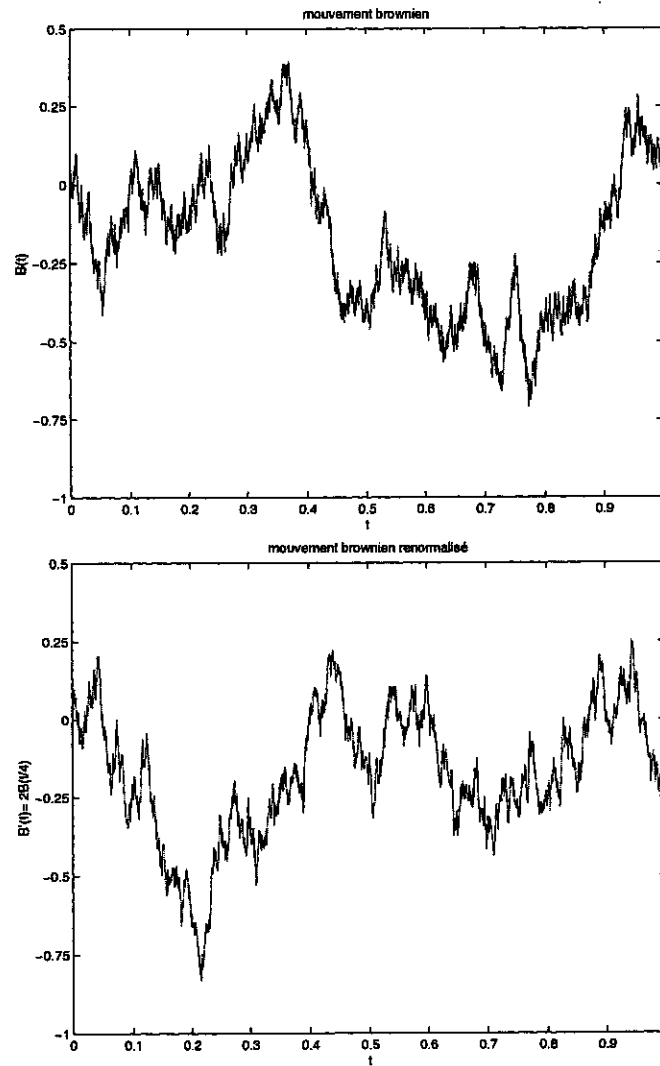


FIG. 2.1: Illustration de la propriété d'auto-similarité : en haut nous avons tracé une réalisation d'un mouvement brownien $B(t)$ et en dessous le processus renormalisé $B'(t) = 2B(\frac{t}{4})$. Les deux courbes semblent présenter les mêmes caractéristiques.

où α est appelé *indice de stabilité* ou *exposant caractéristique* de la loi stable.

Par ailleurs une variable X α -stable a une fonction caractéristique dont la forme est explicite [TS94] et dépend de quatre paramètres $\alpha \in]0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$E \left[e^{i\theta X} \right] = \begin{cases} \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta(\text{sign } \theta) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(-\sigma |\theta| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } \theta) \ln |\theta|) + i\mu\theta) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

$$\text{sign } \theta \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \theta > 0 \\ 0 & \text{si } \theta = 0 \\ -1 & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

Une telle loi est souvent dénotée $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Le paramètre α est l'exposant caractéristique de la loi. Lorsque $\alpha = 2$, la fonction caractéristique précédente se réduit à

$$E \left[e^{i\theta X} \right] = \exp(-\sigma^2 \theta^2 + i\mu\theta)$$

et donc X est une loi gaussienne de moyenne μ et de volatilité $2\sigma^2$. Lorsque $\alpha \neq 2$, celui-ci gouverne la décroissance de la loi de probabilité à l'infini

$$p(x) \sim_{\infty} \frac{A_{\pm}^\alpha}{|x|^{1+\alpha}}$$

où A_{\pm} sont deux coefficients, reliés aux paramètres de la loi, mesurant l'amplitude des queues. En particulier, nous constatons que dans ce cas tout moment d'ordre supérieur à α (et en particulier la variance) diverge.

Le paramètre μ est un paramètre de localisation, égal à la moyenne lorsqu'elle est définie, et σ est un paramètre d'échelle.

Le paramètre β gouverne l'asymétrie de la distribution. Les cas $\beta = 1$ ou -1 conduisent à des variable totalement asymétriques. Lorsque $\beta = \mu = 0$, la distribution est symétrique et la fonction caractéristique prend la forme simplifiée

$$E \left[e^{i\theta X} \right] = \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha)$$

Lorsque α s'éloigne de 2, la distribution cesse d'être gaussienne, devient de plus en plus piquée autour de l'origine et de plus en plus épaisse dans les queues : c'est la fin d'un monde gaussien moyen et l'entrée dans un monde intermittent, hiérarchisé, où la plupart des événements sont minuscules à l'exception de quelques uns qui sont gigantesques et dominent tous les autres.

DÉFINITION 2.2.3 (PROCESSUS DE LÉVY α -STABLE)

Un processus $(X(t), t \in \mathbb{R})$ est un mouvement de Lévy α -stable si

- $X(0) = 0$ p.s.
- X a des accroissements indépendants et stationnaires
- $X(t) - X(s) \sim S_\alpha(|t - s|^{1/\alpha}, 0, 0)$ pour un $\alpha \in]0, 2]$

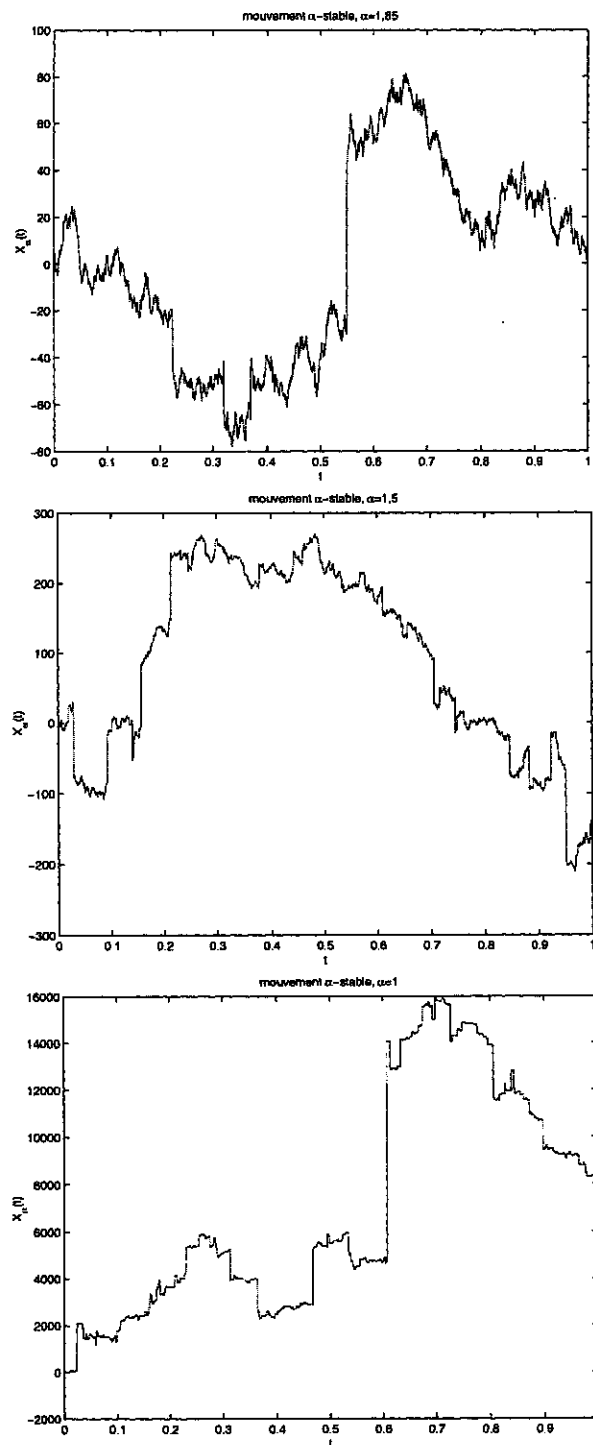


FIG. 2.2: Exemples de processus auto-similaires : le mouvement de Lévy α -stable ($\alpha = 1.85$, en haut ; $\alpha = 1.5$, au milieu ; $\alpha = 1$, en bas). Ces processus présentent des sauts, avec des discontinuités de plus en plus marquées lorsque α diminue (noter la différence d'échelle).

Ces processus sont une généralisation du mouvement brownien (qu'on retrouve dans le cas $\alpha = 2$). Contrairement à celui-ci, dès que $\alpha \neq 2$ les processus de Lévy α -stable ne sont plus continus et présentent des sauts [Ber96]. Il est facile de se convaincre que de tels processus sont auto-similaires avec un exposant [EM00]

$$H = \frac{1}{\alpha}$$

Nous avons illustré cette propriété sur la figure 2.3.

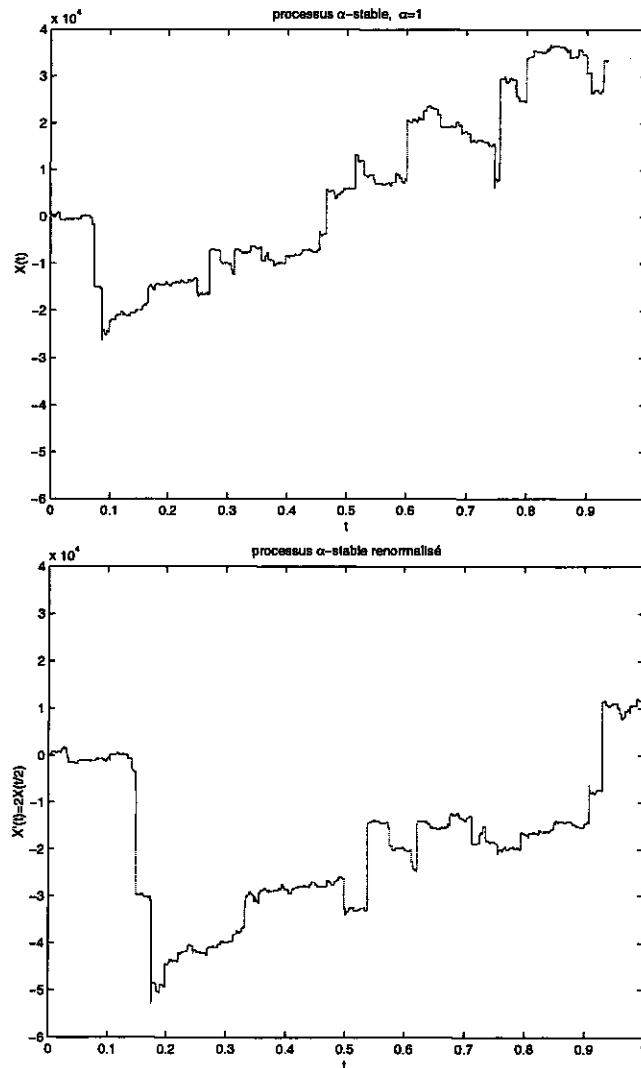


FIG. 2.3: Illustration de la propriété d'auto-similarité : en haut nous avons tracé une réalisation d'un mouvement de Lévy α -stable $X(t)$, $\alpha = 1$ et en dessous le processus renormalisé $X'(t) = 2X(t/2)$. Les deux courbes semblent présenter les mêmes caractéristiques.

Mouvement brownien fractionnaire Pour illustrer l'influence des corrélations, nous pouvons considérer le mouvement brownien fractionnaire introduit par Mandelbrot et Van Ness[MVN68]. Caractérisé par un paramètre $H \in]0, 1[$, il est défini comme le processus gaussien $B_H(t)$ nul en $t = 0$, de moyenne nulle et de covariance donnée par

$$E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2} [t^{2H} - |t - s|^{2H} + s^{2H}]$$

Notons que pour $H = 1/2$, nous retrouvons le mouvement brownien puisque l'expression précédente se réduit à $E[B_{1/2}(t)B_{1/2}(s)] = \min(t, s)$. Par ailleurs, d'autres constructions du mouvement brownien fractionnaire existent. Ainsi il peut également être défini à partir du mouvement brownien standard $B(t)$ par l'intégrale stochastique [TS94]

$$\begin{aligned} B_H(t) &= \int_{-\infty}^t \omega_H(t, u) dB(u) \\ \omega_H(t, u) &= \begin{cases} (t - u)^{H-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0 \leq u < t \\ (t - u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} & \text{pour } u < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il est aisé de se convaincre à partir d'une de ces deux définitions que le mouvement brownien fractionnaire est auto-similaire d'indice H . D'après 2.2.2 il présente des incréments dépendants. Lorsque $1/2 < H < 1$ les corrélations sont positives et à longue portée, tandis que la condition $0 < H < 1/2$ conduit à des corrélations négatives. Pour $H = 1/2$, les accroissements sont indépendants. Dans le cas $1/2 < H < 1$, en raison des corrélations positives qui ont pour effet de favoriser une tendance haussière ou baissière (le processus est *persistant*), le processus semble plus régulier que le mouvement brownien. En revanche, dans le cas $0 < H < 1/2$ les anti-corrélations rendent le processus plus sauvage et moins régulier que le mouvement brownien (voir la figure 2.4 pour une illustration graphique). Plus précisément, on montre que les trajectoires d'un mouvement brownien H -fractionnaire sont presque sûrement hôlderienne d'ordre H . C'est un premier exemple du lien qu'il peut exister entre comportement global (auto-similarité d'indice H) et comportement local (plus ou moins grande régularité des courbes) à propos duquel nous reviendrons en évoquant l'analyse multifractale.

Qualités et défauts des processus auto-similaires Nous avons présenté deux types de processus auto-similaires : les mouvements de Lévy stables et les mouvements browniens fractionnaires, le mouvement brownien standard appartenant simultanément aux deux classes. D'autres processus auto-similaires existent [PT02a, PT02b], par exemple les processus stables qui généralisent les mouvements de Lévy stables en autorisant des incréments dépendants. L'auto-similarité est une propriété mathématique très agréable car la connaissance du processus à une échelle suffit pour en déduire son comportement à toutes les échelles (c'est particulièrement clair avec le mouvement brownien fractionnaire où dynamique locale (la régularité) et globale sont toutes deux gouvernées par l'exposant de Hurst). En contrepartie, cette concision entraîne des contraintes qui la rendent mal adaptée à la modélisation de phénomènes réels et complexes où les propriétés à grande échelle diffèrent notablement de celles à petite échelle. Les processus multifractals ont pour but de restituer cette richesse de comportement tout en préservant le plus possible de simplicité.

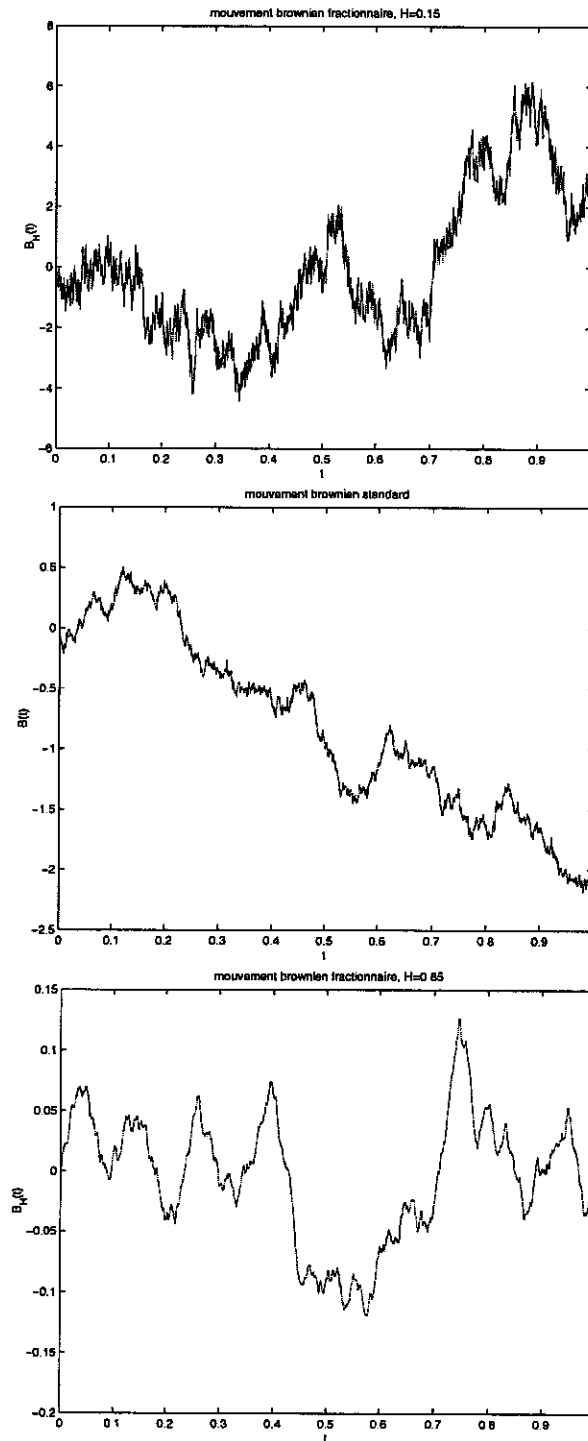


FIG. 2.4: Exemples de processus auto-similaires : le mouvement brownien fractionnaire ($H = 0.15$, en haut ; $H = 0.5$, au milieu ; $H = 0.85$, en bas). Sur cet exemple, nous voyons clairement que plus l'exposant d'échelle augmente, plus la régularité locale augmente.

2.3 Processus multifractals

2.3.1 Moments et lois d'échelle

Considérons un processus $X(t)$, auto-similaire d'indice H et à accroissements stationnaires. En notant $\delta_l X(t) = X(t+l) - X(t)$ l'accroissement de longueur l , définissons la quantité

$$M(q, l) = E(|\delta_l X(t)|^q)$$

$X(t)$ étant un processus auto-similaire et à accroissements indépendants, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} M(q, l) &= E(|\delta_l X(t)|^q) = E(|X(l)|^q) \\ &= E(|l^H X(1)|^q) = l^{Hq} E(|X(1)|^q) \\ &= l^{Hq} M(q, 1) \end{aligned}$$

Cette propriété va nous servir de définition des processus fractals.

DÉFINITION 2.3.1 (PROCESSUS FRACTALS)

Un processus $X(t)$ à accroissements stationnaires est fractal s'il présente la loi d'échelle suivante

$$M(q, l) = E(|\delta_l X(t)|^q) = C(q)l^{\zeta(q)}$$

pour tout $l \in \mathcal{T}$ et $q \in \mathcal{Q}$. \mathcal{T} est un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 et \mathcal{Q} un intervalle de \mathbb{R} contenant $[0, 1]$. $C(q)$ et $\zeta(q)$ sont des fonctions déterministes de q .

Remarquons tout d'abord que si le processus est stationnaire et vérifie $X(0) = 0$, il est équivalent d'étudier le comportement de $E(|X(l)|^q)$. Par la suite, nous ferons fréquemment cet abus de langage.

Si $\zeta(q)$ est une fonction linéaire de q , on parle de processus monofractal. Par exemple les processus auto-similaires, caractérisés par un exposant d'échelle H tel que $\zeta(q) = qH$, présentent un caractère monofractal. En revanche si $\zeta(q)$ est une fonction non linéaire de q , on parle de processus multifractal. Caractérisé par une infinité d'exposants d'échelle, un processus multifractal possède donc une structure beaucoup plus riche, qui en fait un très bon candidat pour la modélisation de phénomènes complexes.

2.3.2 Premières propriétés des processus multifractals

Concavité de la fonction $\zeta(q)$ La concavité de la fonction $\zeta(q)$ est une conséquence de l'inégalité de Hölder. En effet pour $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$ et $\lambda \in [0, 1]$, celle-ci implique que

$$E(|\delta_l X(t)|^{(1-\lambda)q_1 + \lambda q_2}) \leq [E(|\delta_l X(t)|^{q_1})]^\lambda [E(|\delta_l X(t)|^{q_2})]^{1-\lambda}$$

d'où, en prenant le logarithme et en notant $q = \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2$,

$$\begin{aligned} \ln C(q) + \zeta(q) \ln l &\leq [\lambda \ln C(q_1) + (1 - \lambda) \ln C(q_2)] \\ &\quad + [\lambda \zeta(q_1) + (1 - \lambda) \zeta(q_2)] \ln l \end{aligned} \tag{2.3}$$

En divisant par $\ln l$ avec $l < 1$ et en faisant tendre l vers 0 (ce qui est légitime car par hypothèse 0 appartient à \mathcal{T}) on trouve que

$$\zeta(\lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2) \geq \lambda \zeta(q_1) + (1 - \lambda)\zeta(q_2) \quad (2.4)$$

ce qui prouve que $\zeta(q)$ est une fonction concave de q .

Temps intégral La relation 2.3 permet également de montrer que le caractère multifractal d'un processus ne peut s'étendre que sur une plage de temps finie, faisant ainsi apparaître un temps intégral L . En effet si on suppose que \mathcal{T} n'est pas borné, alors en divisant 2.3 par $\ln l$ avec $l > 1$ et en faisant tendre cette fois-ci l vers $+\infty$ on trouve que

$$\zeta(\lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2) \leq \lambda \zeta(q_1) + (1 - \lambda)\zeta(q_2)$$

ce qui est en contradiction avec la concavité et la non linéarité de la fonction $\zeta(q)$. On en déduit que l'intervalle \mathcal{T} est nécessairement borné d'où l'existence d'un temps intégral L au delà duquel le processus cesse d'exhiber un caractère multifractal. En pratique l'existence d'un tel "cut-off" n'est pas une réelle limitation car, comme on le verra, L peut être rendu arbitrairement grand.

2.3.3 mise en évidence de la multifractalité

Nous présentons maintenant les trois méthodes les plus couramment utilisées pour détecter la multifractalité dans une série de données.

Fonction de structure C'est la méthode traditionnelle, introduite par Frisch et Parisi [FP83, Fri95] et elle correspond simplement à la vérification empirique de notre définition d'un processus multifractal.

Soit notre série $x(k)$, $k = 1, \dots, N$. Nous définissons la fonction de structure ²

$$S(\ell, q) = \sum_{j=0}^{\lfloor N/\ell \rfloor} |x(j\ell + \ell) - x(j\ell)|^q$$

Si notre série est multifractale, alors $S(q, \ell)$ doit se comporter en fonction de ℓ comme une loi puissance

$$S(q, \ell) \sim \ell^{\tau(q)}$$

avec l'exposant

$$\tau(q) = \zeta(q) - 1 \quad (2.5)$$

Pour un physicien, cette fonction de structure évoquera sans doute les fonctions de partition rencontrées en physique statistique. Pour un financier, elle peut être interprétée comme une sorte de volatilité généralisée à des exposants q différents de 2.

² $[x]$ désigne la partie entière de x .

Multifractal Detrended Fluctuations Analysis La méthode DFA (Detrended Fluctuation Analysis) a été initialement introduite par Peng *et al.* [PBH⁺94] pour caractériser les dépendances à longue portée dans les séquences d'ADN (voir aussi [TTW95] pour une discussion plus théorique) et a été généralisée pour mettre en évidence la multifractalité [KZKB⁺02]. La méthode comprend cinq étapes. Soit une série $x(k)$ dont on veut étudier les propriétés multifractales.

- On définit une série profil

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [x(k) - E(x)], \quad i = 1, \dots, N$$

- On divise cette nouvelle série en $N_s = \lfloor N/s \rfloor$ segments de longueur s et sans chevauchement. Comme N n'est pas en général un multiple de s , il peut rester une partie non utilisée de la série profil. Pour utiliser cette partie des données, on peut répéter la procédure précédente en partant de la fin de la série Y ce qui nous donne $2N_s$ segments.
- Pour chacun de ces segments ν , on calcule la tendance locale par une régression polynomiale, le polynôme y_ν utilisé pouvant être, selon les données considérées, linéaire, quadratique, cubique ou même d'ordre m plus élevé. Ceci permet d'être insensible à une tendance présente dans la série x_k . On détermine ensuite les variances

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(\nu - 1)s + i] - y_{\nu(i)}\}^2$$

pour les segments ν de 1 à N_s et

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (\nu - N_s)s + i] - y_{\nu(i)}\}^2$$

pour $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$. Notons que par construction $F^2(\nu, s)$ n'a de sens que pour $s \geq m + 2$.

- On moyenne ensuite sur tous les segments pour obtenir la fonction de fluctuation d'ordre q

$$F(s, q) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}$$

où q peut prendre toute valeur réelle positive.

- Les étapes précédentes sont répétées pour plusieurs valeurs de s (en pratique, pour que la moyenne précédente conserve un sens, on se limite à $s < N/4$) et on détermine, pour chaque q , le comportement d'échelle de la fonction de fluctuation en analysant le tracé de $\ln F(q, s)$ contre $\ln s$. Si la série est multifractale, on doit trouver un comportement du type

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}$$

Le cas $q = 0$ est dégénéré et on étudie plutôt

$$F(s, 0) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} \ln[F^2(\nu, s)] \right\} \sim s^{h(0)}$$

On montre que l'exposant $h(q)$ trouvé est relié à l'exposant $\zeta(q)$ par la formule

$$\zeta(q) = qh(q) \quad (2.6)$$

Méthode par ondelettes Les méthodes par ondelettes sont également parmi les plus populaires car, comme la précédente, elles sont insensibles aux tendances locales. De plus les ondelettes étant par construction des objets autosimilaires, elles sont bien adaptées pour traiter des objets multifractals. Parmi les nombreuses techniques faisant intervenir les ondelettes, nous allons présenter la méthode par maxima d'ondelettes [MBA93].

Une ondelette [Mal00, Dau92] est une fonction $\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, de moyenne nulle et normalisée à 1. On peut de plus exiger qu'une ondelette soit aveugle à un polynôme de bas degré, soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad \forall 0 \leq k < m$$

Un exemple classique de telles fonctions sont les dérivées successives normalisées de la gaussienne

$$\psi(x) \sim d^m(e^{-x^2/2})/dx^m$$

qui sont aveugles aux polynômes de degré strictement inférieur à m .

La transformée en ondelettes d'une fonction $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ est définie par

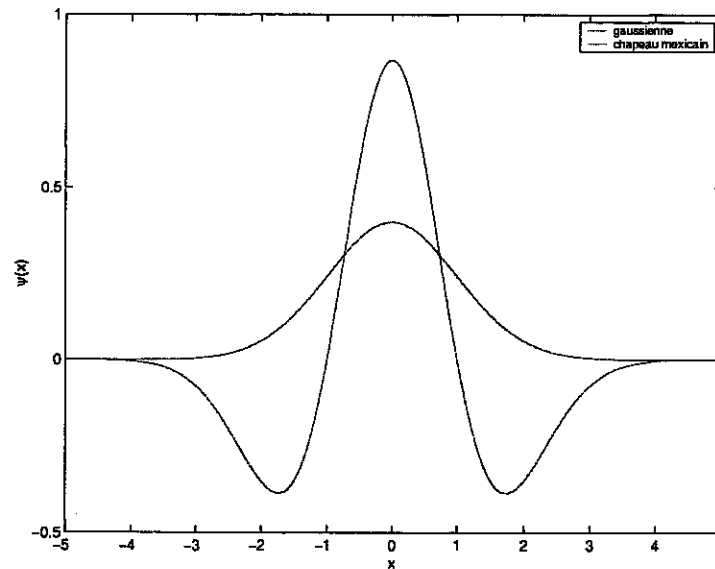


FIG. 2.5: Deux exemples d'ondelettes : la fonction gaussienne et sa dérivée seconde, normalisée, connue sous le nom de chapeau mexicain.

$$Wf(u, s) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

où $u \in \mathbb{R}$ est un paramètre de localisation et $s > 0$ un paramètre d'échelle. La transformée en ondelettes mesure donc la variation de f autour de u et sur une échelle de s . Intuitivement,

si on fait tendre s vers 0, on espère apprendre de cette transformée des indications sur la régularité de f .

L'idée de l'analyse par maxima d'ondelettes est de construire une fonction de structure un peu spéciale. Pour cela, on définit pour chaque échelle s les maxima locaux de $|Wf(u, s)|$ en fonction de u . Dans le plan (u, s) ces maxima sont disposés le long de courbe appelées lignes de maxima. On note $\mathcal{L}(s_0)$ l'ensemble de ces lignes l qui vérifient

$$(u, s) \in l \implies s \leq s_0$$

$$\forall s \leq s_0, \exists (u, s) \in l$$

et on définit la fonction de structure

$$\mathcal{Z}(s, q) = \sum_{l \in \mathcal{L}(s)} \left[\sup_{(u, s^*) \in l} |Wf(u, s^*)| \right]^q$$

En présence de multifractalité, on montre que lorsque s tend vers 0 cette fonction se comporte en fonction de s comme une loi puissance

$$\mathcal{Z}(s, q) \sim s^{\omega(q)}$$

avec un exposant qui vérifie

$$\omega(q) = \zeta(q) - 1 \quad (2.7)$$

Pour l'analyse d'une série temporelle on utilise plutôt une transformée en ondelettes discrète, mais les idées sont les mêmes et conduisent à des résultats identiques.

Comparaison La première méthode présente l'avantage de sa simplicité de mise en œuvre par rapport aux deux autres. En particulier, les méthodes par ondelettes sont plus exigeantes du point de vue des algorithmes à utiliser, mais il est possible de trouver en libre accès des logiciels où les procédures sont déjà (bien !) codées [wav, las]. En toute généralité, les méthodes par maxima d'ondelettes ou par MDFA sont couramment citées comme étant les deux plus performantes à mettre en évidence la multifractalité, car elles sont notamment insensibles à une tendance polynomiale éventuellement présente dans la série, ce qui n'est pas le cas avec la fonction de structure. Néanmoins, en ce qui nous concerne, les séries financières que nous étudierons ne sont pas sujettes à ce type d'artefact et les trois méthodes conduisent à des résultats comparables.

2.4 Analyse multifractale

Grossièrement, le but de l'analyse multifractale est de caractériser la régularité de la fonction ou du processus étudié. Opération particulièrement difficile en règle générale, nous présentons dans cette section ses principaux outils et le lien avec notre approche des processus multifractals.

2.4.1 Régularité locale, exposant de Hölder

Nous considérons une fonction réelle f définie sur \mathbb{R} , éventuellement aléatoire.

Elle est dite h -hölder continue au point t_0 ($f \in C^h(t_0)$) s'il existe un polynôme P de degré inférieure à h et une constante $C > 0$ tels que

$$|f(t) - P(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^h$$

f est localement hölderienne de degré α au point t_0 si pour tout $h < \alpha$ f est h -hölder continue en t_0 mais ne l'est plus pour $h > \alpha$. α est souvent appelé exposant de Hölder de f en t_0 et il mesure la force de la singularité de la fonction f en t_0 . Par exemple si $\alpha \geq 1$ alors f est dérivable en t_0 (plus généralement si $\alpha \geq m$, f est m fois dérivable en t_0) tandis qu'une discontinuité de f en t_0 implique $\alpha = 0$: ainsi plus α est grand, plus la régularité locale de la fonction est importante. α peut également prendre des valeurs non entières. Par exemple, les trajectoires du mouvement brownien sont caractérisées par un exposant de Hölder égal presque partout à $1/2$.

2.4.2 Spectre de singularité

Rien ne garantit à priori que l'exposant de Hölder d'une fonction déterministe f demeure constant sur un intervalle I de \mathbb{R} . C'est encore pire dans le cas d'un processus aléatoire puisqu'on peut imaginer que l'exposant de Hölder $h(t)$ varie à chaque réalisation. Il est donc intéressant d'introduire une notion moins précise mais dont on peut espérer qu'elle soit plus robuste.

Pour cela on définit l'ensemble E_α des points t où notre fonction a un exposant de Hölder égal à $\alpha \geq 0$

$$E_\alpha = \{t \mid h(t) = \alpha\}$$

En général ces ensembles s'intriquent, s'entrelacent entre eux et présentent une structure extrêmement complexe, impossible à décrire simplement par une forme euclidienne : ils sont des objets typiques de la géométrie fractale [HJK⁺86, Fal90].

Nous appellerons spectre de singularités de f la fonction $d(\alpha)$ qui à α associe la dimension de Hausdorff³ de E_α

$$d(\alpha) = \dim_H E_\alpha$$

avec la convention que $d(\alpha) = -\infty$ lorsque α n'est pas un exposant de Hölder de la fonction f . $d(\alpha)$ représente en quelque sorte la fréquence avec laquelle une singularité d'ordre α apparaît dans la fonction.

Lorsque le spectre de singularités est "non-trivial", c'est à dire non réduit à un point, la fonction est qualifiée de multifractale. Cette définition est différente de celle que nous avons prise au début du chapitre mais comme nous l'avons précisé cette notion n'est pas définie de manière unique et nous allons voir le lien avec notre point de vue.

³Voir l'appendice B pour une définition de la mesure de Hausdorff.

2.4.3 Formalisme multifractal

La définition précédente est difficilement exploitable en pratique : elle nécessite en effet la détermination de la mesure de Hausdorff, tâche difficile, d'ensembles présentant eux-mêmes une structure très complexe. Beaucoup d'auteurs, et tout particulièrement en physique, ont donc cherché une méthode pratique pour déterminer ce spectre. Ces travaux ont abouti à l'analyse multifractale que nous allons définir maintenant.

Les travaux fondateurs dans ce domaine sont ceux de Frisch et Parisi [FP83, Fri95] qui ont relié l'exposant $\zeta(q)$ de la fonction de structure au spectre $d(\alpha)$ dans le cas où les singularités sont d'ordre $\alpha \leq 1$. La définition de la multifractalité qu'ils utilisent est la même que la nôtre, à savoir que la fonction f , éventuellement aléatoire, est multifractale si la relation d'échelle suivante est vérifiée

$$M(q, \ell) = E(|f(x + \ell) - f(x)|^q) \sim \ell^{\zeta(q)}$$

Lorsque ℓ tend vers 0, il est possible d'exprimer $M(q, \ell)$ en faisant intervenir le spectre des singularités. Au voisinage d'une singularité d'ordre α on a, dans une boîte de taille ℓ

$$|F(x + \ell) - F(x)|^q \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} |\ell|^{\alpha q}$$

Si la dimension de cette singularité est $d(\alpha)$ il y a environ $|\ell|^{-d(\alpha)}$ de telles boîtes, chacune de taille $|\ell|$. La contribution totale de cette singularité à l'intégrale est donc environ

$$\ell^{\alpha q + 1 - d(\alpha)}$$

L'ordre de grandeur de l'intégrale est donné par la plus grande contribution qui correspond, lorsque ℓ tend vers 0, à l'exposant le plus faible (méthode de la plus grande pente ou "steepest descent"), d'où la relation

$$\zeta(q) = \inf_{\alpha} (q\alpha + 1 - d(\alpha)) \quad (2.8)$$

La fonction $\zeta(q)$ est donc la transformée de Legendre de $d(\alpha)$. Sous certaines conditions, essentiellement de concavité, $d(\alpha)$ peut alors être déduite de $\zeta(q)$ par la transformée de Legendre inverse

$$d(\alpha) = \inf_q (q\alpha + 1 - \zeta(q)) \quad (2.9)$$

Lorsque $\zeta(q) = Hq$ est une fonction linéaire, il est facile de voir que la formule précédente conduit à un spectre réduit au point $H : d(H) = 1$. En revanche lorsque $\zeta(q)$ est une fonction non linéaire de q , le spectre n'est plus dégénéré, ce qui montre la cohérence entre les deux définitions données d'un objet multifractal.

Bien sûr la "preuve" que nous venons de donner est tout sauf rigoureuse et limitée au cas $\alpha \leq 1$. Il est toutefois possible, au prix d'une certaine dextérité technique, de montrer rigoureusement que certaines classes de processus vérifient explicitement les relations 2.8 et 2.9 (on dit alors qu'elles satisfont le formalisme multifractal). En particulier, Jaffard a prouvé que les processus de Lévy étaient multifractals en ce sens fort [Jaf99].

2.5 Modèles en cascade

Les premiers objets multifractals proposés dans la littérature ont été les mesures multifractales construites à partir de cascades. L'exemple le plus simple, non aléatoire, est la mesure binomiale, ou mesure de Bernoulli, sur l'intervalle $[0,1]$. Introduite par Mandelbrot [Man74, Man89], elle représente encore aujourd'hui l'archétype des constructions par cascade multiplicative.

2.5.1 Mesure binomiale

Considérons la mesure de probabilité uniforme μ_0 sur l'intervalle $[0, 1]$ et deux réels positifs m_0 et m_1 tels que $m_0 + m_1 = 1$. A la première étape, la mesure μ_1 est construite en répartissant uniformément la masse m_0 sur l'intervalle $[0, 1/2]$ et la masse m_1 sur l'intervalle $[1/2, 1]$:

$$\mu_1([0, 1/2]) = m_0, \quad \mu_1([1/2, 1]) = m_1$$

A la seconde étape, l'intervalle $[0, 1/2]$ est à nouveau divisé en deux intervalles $[0, 1/4]$ et $[1/4, 1/2]$ qui reçoivent respectivement une fraction m_0 et m_1 de $\mu_1([0, 1/2])$. La même procédure est appliquée à l'intervalle $[1/2, 1]$ ce qui conduit à la construction d'une mesure μ_2 telle que :

$$\begin{aligned} \mu_2([0, 1/4]) &= m_0 m_0, & \mu_2([1/4, 1/2]) &= m_0 m_1 \\ \mu_2([1/2, 3/4]) &= m_1 m_0, & \mu_2([3/4, 1]) &= m_1 m_1 \end{aligned}$$

Par itération de cette procédure est construite une séquence infinie de mesures. A l'étape $k+1$, étant donnée la mesure μ_k et l'intervalle $[t, t + 2^{-k}]$ où t est un nombre 2-adique, la masse $\mu_k([t, t + 2^{-k}])$ est répartie sur les deux intervalles $[t, t + 2^{-k-1}]$ et $[t + 2^{-k-1}, t + 2^{-k}]$ selon les proportions m_0 et m_1 . La répétition de cette procédure à tous les sous-intervalles permet de déterminer la mesure μ_{k+1} . La mesure binomiale μ est alors définie comme la limite de la séquence μ_k .

2.5.2 Mesure multinomiale

Il est assez naturel d'envisager des extensions à cette construction. Notons tout d'abord que l'extension à un intervalle quelconque est immédiate en suivant les mêmes étapes que précédemment. Nous pouvons ensuite considérer la mesure multinomiale où, à chaque étape, les intervalles ne sont plus divisés en 2 mais en $m > 2$ sous-intervalles, indexés par $\beta = 1, \dots, m$. Chacun d'entre eux reçoit une fraction m_β de la masse totale. Pour assurer la conservation de la mesure totale, il est nécessaire d'imposer la condition $\sum_\beta m_\beta = 1$.

2.5.3 Cascades multiplicatives

Il est également possible de généraliser les constructions précédentes et de s'affranchir de leur caractère déterministe en considérant la classe plus vaste des cascades multiplicatives.

L'idée est de considérer comme générateurs de la cascade, plutôt que des valeurs discrètes déterministes, une variable aléatoire réelle. Chaque M_β est alors tirée selon une même loi M , indépendamment à chaque étape. La cascade peut alors être *conservative* (on dit aussi *micro-canonique*) ou *canonique*. Dans le premier cas la masse est strictement conservée à chaque étape, ce qui exige l'égalité

$$\sum_{\beta=1}^b M_\beta = 1$$

Dans le second, la préservation de la mesure n'est vérifiée que statistiquement soit

$$E \left(\sum_{\beta=1}^b M_\beta \right) = 1$$

cascade conservative Avec cette hypothèse, à l'étape k , la masse de l'intervalle b -adique de longueur $\Delta t = b^{-k}$ et commençant à $t = 0$, $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k = \sum_{i=1}^{i=k} \eta_i b^{-i}$ égale

$$\mu(\Delta t) = M(\eta_1) M(\eta_1 \eta_2) \dots M(\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k)$$

où les variables $M(\eta_1), M(\eta_1 \eta_2), \dots, M(\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k)$ sont indépendantes et de même loi. On en déduit que

$$\begin{aligned} E[\mu(\Delta t)^q] &= E[M(\eta_1)^q M(\eta_1 \eta_2)^q \dots M(\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k)^q] \\ &= [E(M^q)]^k \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire

$$E[\mu(\Delta t)^q] = (\Delta t)^{\zeta(q)}$$

avec

$$\zeta(q) = -\log_b E(M^q)$$

Cascade canonique Les choses sont un peu plus délicates car rien n'assure ici que la masse soit préservée à chaque étape. En conséquence la masse totale Ω devient elle-même aléatoire et vérifie l'identité en loi, parfois appelée "star equation" [Man01]

$$\sum_{\beta=1}^b M_\beta \Omega_\beta \stackrel{d}{=} \Omega$$

où les Ω_β sont des copies indépendantes de Ω . La variable Ω peut donc être vue comme le point fixe d'une moyenne pondérée aléatoire. Ce type d'équations, qui étendent avec des coefficients aléatoires celles définissant les lois stables, a fait l'objet de multiples travaux en probabilités [KP76, DL83, Gui90, Liu02]. En particulier, il a été démontré par [KP76] que sous la condition

$$E(M \log M) < 0$$

la limite de la cascade existe et n'est pas dégénérée. De plus, [Gui90] prouve que, sous cette condition, s'il existe $q_c > 1$ tel que

$$E(M^{q_c}) = 1/b$$

alors la forme asymptotique de la distribution de Ω est parétienne d'exposant q_c [Gui87]

$$P(\Omega > \omega) \sim \frac{C_1}{\omega^{q_c}}$$

avec $C_1 > 0$ et $1 < q_c < \infty$.

Avec les notations précédentes, la masse de l'intervalle b -adique précédent s'écrit alors

$$\mu(\Delta t) = \Omega M(\eta_1) M(\eta_1 \eta_2) \dots M(\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} E[\mu(\Delta t)^q] &= E[\Omega^q M(\eta_1)^q M(\eta_1 \eta_2)^q \dots M(\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k)^q] \\ &= E(\Omega^q) [E(M^q)]^k \end{aligned}$$

qui peut là encore s'écrire

$$E[\mu(\Delta t)^q] = E(\Omega^q) (\Delta t)^{\zeta(q)}$$

avec

$$\zeta(q) = -\log_b E(M^q)$$

D'après ce qui précède, nous savons qu'au delà d'une valeur q_c les moments de la variable Ω divergent. À l'inverse du cas microcanonique, la mesure multiplicative canonique a donc des moments divergents à partir de ce seuil, déterminé par la distribution des multiplicateurs M . Ce résultat nous servira lorsque nous calculerons les moments du processus MMAR.

Nous pouvons illustrer la discussion précédente en se donnant une loi pour les variables M_β . Supposons par exemple que M soit distribuée selon une loi log-normale, plus précisément

$$\log_b M \sim \mathcal{N}(-\gamma, \sigma^2)$$

Un calcul gaussien sans difficulté montre que

$$E(M^q) = \exp[-q \ln b (2\gamma - \sigma^2 \ln b)/2]$$

La préservation de la masse en moyenne exige que $E(M) = 1/b$ d'où la condition

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 2(\gamma - 1)/\ln b \\ \gamma &= 1 + \sigma^2 \ln b/2 \end{aligned}$$

ce qui montre que γ est nécessairement supérieur à 1. Par ailleurs, la condition de Guivarc'h $E(M^{q_c}) = 1/b$ admet pour solution

$$q_c = 1/(\gamma - 1)$$

qui est supérieur à 1 si γ reste inférieur à 2. Sous la condition $1 < \gamma < 2$ le modèle de cascade log-normale présente donc des moments divergents au delà du seuil $q_c = 1/(\gamma - 1)$.

L'exposant multifractal $\zeta(q)$ peut également être calculé et, d'après ce qui précède, il est donné par

$$\begin{aligned}
 \zeta(q) &= -\log_b E(M^q) \\
 &= \gamma q - \sigma^2 q^2 \ln b / 2 \\
 &= q + q(1-q)\sigma^2 \ln b / 2 \\
 &= \gamma q - q^2(\gamma - 1)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

L'exposant $\zeta(q)$ a les propriétés remarquables

$$\begin{aligned}
 \zeta(0) &= 0 \\
 \zeta(1) &= 1 \\
 \zeta(q_c) &= 1
 \end{aligned}$$

Il faut noter que ces relations ne sont pas propres à la cascade log-normale. Elles sont au contraire toujours vérifiées (à condition pour la troisième que q_c existe), quelle que soit la distribution des variables M . En particulier la concavité de la fonction $\zeta(q)$ combinée aux deux premières égalités entraîne

$$\begin{aligned}
 \zeta(q) &\geq q \quad \text{pour } q \in [0, 1] \\
 \zeta(q) &< q \quad \text{sinon}
 \end{aligned}$$

Une autre quantité intéressante est la corrélation entre la mesure de deux intervalles. La structure multiplicative de la construction va nous permettre de calculer cette valeur, directement reliée à la distance qui sépare les deux intervalles. Considérons la cascade après k étapes. L'intervalle $[0, 1]$ est alors partitionné en sous-intervalles de longueur $\Delta t = b^{-k}$ dont les extrémités sont des nombres b -adiques. Soient plus précisément deux de ces intervalles : $I_1 = [t_1, t_1 + \Delta t]$ et $I_2 = [t_2, t_2 + \Delta t]$ avec, en notation b -adique, $t_1 = 0.\eta_1 \dots \eta_k$ et $t_2 = 0.\zeta_1 \dots \zeta_k$. Considérons les $m \geq 1$ premiers termes identiques⁴ des décompositions b -adiques de t_1 et t_2 : $\eta_1 = \zeta_1, \dots, \eta_m = \zeta_m$ mais $\eta_{m+1} \neq \zeta_{m+1}$. La structure multiplicative implique l'inégalité

$$b^{-(m+1)} \leq |t_2 - t_1| \leq b^{-m}$$

et l'égalité

$$\begin{aligned}
 \mu(I_1)^q \mu(I_2)^q &= \Omega_{\eta_1 \dots \eta_m}^q \cdot \Omega_{\zeta_1 \dots \zeta_m}^q \cdot (M_{\eta_1} \dots M_{\eta_m})^{2q} \\
 &\quad \cdot (M_{\eta_{m+1}} \dots M_{\eta_k})^q \cdot (M_{\zeta_{m+1}} \dots M_{\zeta_k})^q
 \end{aligned}$$

On en déduit, en prenant l'espérance de la quantité précédente

$$\begin{aligned}
 E[\mu(I_1)^q \mu(I_2)^q] &= (E[\Omega^q])^2 \cdot (E[M^{2q}])^m \cdot (E[M^q])^{2(k-m)} \\
 &= (E[\Omega^q])^2 \cdot (E[M^q])^{2k} \left[(E[M^{2q}] / (E[M^q])^2)^m \right] \\
 &= (E[\Omega^q])^2 (\Delta t)^{2\zeta_q} \left(b^{-m(\zeta_{2q} - 2\zeta_q)} \right)
 \end{aligned}$$

⁴si t_1 et t_2 n'ont pas le premier terme de leur décomposition b -adique identique, ils n'ont aucun ancêtre en commun. $\mu(I_1)$ et $\mu(I_2)$ sont alors indépendants.

Dans le cas particulier où $q = 1$, l'égalité précédente devient

$$E[\mu(I_1)\mu(I_2)] = (E[\Omega])^2 (\Delta t)^{2\zeta_1} \left(b^{-m(\zeta_2 - 2\zeta_1)} \right)$$

Or $\zeta(1) = 1$ et $\zeta(2) - 2\zeta(1) = \zeta(2) - 2 < 0$. L'inégalité précédente entraîne donc

$$(E[\Omega])^2 (\Delta t)^2 b^{\zeta(2)-2} |t_2 - t_1|^{\zeta(2)-2} \leq E[\mu(I_1)\mu(I_2)] \leq (E[\Omega])^2 (\Delta t)^2 |t_2 - t_1|^{\zeta(2)-2}$$

Cette fonction de corrélation décroît donc comme une fonction hyperbolique de $|t_2 - t_1|$ dont l'exposant est donné par $\zeta(2) - 2$. Avec un choix adéquat des paramètres de la cascade, cet exposant peut être rendu petit, faisant ainsi apparaître un phénomène de dépendance à longue portée.

2.5.4 Conclusion

La construction de la mesure binomiale peut donc être généralisée et aboutit à une vaste classe de mesures multifractales construites par cascades multiplicatives. Celles-ci sont micro-canoniques lorsque la masse est exactement préservée tandis que le cas canonique conduit à une mesure aléatoire et dont les moments divergent à partir d'un certain rang.

Ces objets utilisent une discrétisation b -adique de l'intervalle dont la rigidité fournit le principal défaut de ces constructions. En effet, en toute rigueur, l'invariance d'échelle n'est pas strictement continue mais restreinte aux sous-intervalles b -adiques. Nous verrons plus loin comment il est possible de résoudre ce problème. Une autre limitation provient de la construction non causale, "de haut en bas", de la cascade : cette dernière peut avoir déjà été construite sur un intervalle $[0, t]$, il sera nécessaire de recommencer entièrement la construction pour l'avoir sur l'intervalle $[0, t + \tau]$.

2.6 MMAR

2.6.1 Définition

Il est possible d'utiliser les mesures précédemment construites pour obtenir des processus multifractals. Dans [MFC97, CFM97, FCM97], les auteurs s'inspirent des travaux de Bochner [Boc55] sur la subordination (voir aussi [Fel68]) pour construire une classe de processus multifractals, le MMAR (Multifractal Model of Asset Returns), destinée à la modélisation de séries financières. Notons qu'en finance, l'utilisation d'un processus subordonateur est une vieille suggestion qui remonte à Clark [Cla73]. Plus récemment, pour mieux rendre compte du fonctionnement du marché qui connaît des périodes de hausse ou de baisse d'activités ("lunch effect", "end-of-the-day effect"), certains proposent d'utiliser un temps déformé, calibré sur une mesure de cette activité, à la place du temps physique [MDD⁺95, AG00].

DÉFINITION 2.6.1 (MMAR)

On appelle processus MMAR un processus $(X(t), t \in [0, T])$ qui s'écrit

$$X(t) \equiv B_H[\theta(t)]$$

où B_H est un mouvement brownien fractionnaire et θ la fonction de répartition d'une mesure aléatoire multifractale sur $[0, T]$, indépendante de B_H .

La mesure multifractale utilisée peut être au choix, conservative ou canonique. Si elle est conservative, par construction la masse totale est fixe. $\theta(t)$ est donc borné et le processus composé $X(t)$ a des moments finis à tout ordre. Si en revanche, la mesure multifractale est canonique la masse totale est aléatoire et $\theta(t)$ n'est pas borné. Dans ce cas, le processus $X(t)$ peut avoir des moments divergents comme nous le verrons plus loin. Il apparaît clairement que les propriétés du processus $X(t)$ vont en grande partie résulter du changement de temps $\theta(t)$.

2.6.2 Propriétés

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes : $\{\mathcal{F}_t^\theta, t \in [0, T]\}$ représentera la filtration engendrée par le processus θ , $\{\mathcal{F}_t^B, t \in [0, T]\}$ la filtration engendrée par le processus B_H et $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ celle du processus X .

Si le q^{eme} moment de $|X(t)|$ existe alors il s'écrit

$$\begin{aligned} E(|X(t)|^q) &= E(|B_H(\theta(t))|^q) \\ &= E\left[E(|B_H(\theta(t))|^q / \mathcal{F}_t^\theta)\right] \\ &= E\left[E(|\theta(t)^H B_H(1)|^q / \mathcal{F}_t^\theta)\right] \\ &= E(\theta(t)^{Hq}) E(|B_H(1)|^q) \end{aligned} \quad (2.11)$$

où nous avons utilisé l'hypothèse d'indépendance entre B_H et θ .

Existence des moments D'après l'équation 2.11 la finitude du moment d'ordre q du processus X dépend de l'existence de $E(\theta(t)^{Hq})$. Si la mesure est conservative, ce moment et donc $E(X(t)^q)$ existent toujours. En revanche, si la mesure est canonique, sa masse totale est aléatoire, avec des queues parétiennes, et $E(\theta(t)^{Hq})$ diverge au delà d'un ordre q_c . D'après la relation 2.11 le comportement de $E(X(t)^q)$ est dicté par celui de $E(\theta(t)^{Hq})$ et donc $E(X(t)^q)$ diverge pour $q > q_c$. Notons que la condition de divergence ne dépend pas de t , ce qui signifie que $E(X(t)^q)$ admet le même comportement (convergence ou divergence) pour tout t .

Lois d'échelle Toujours d'après la relation 2.11, on déduit que le processus $X(t)$ est multifractal avec un exposant $\zeta_X(q)$ relié à l'exposant $\zeta_\theta(q)$ de la mesure multifractale par la formule

$$\zeta_X(q) = \zeta_\theta(qH)$$

En effet, puisque θ est la fonction de répartition d'une mesure multifractale 2.11 peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} E(|X(t)|^q) &= E(\theta(t)^{Hq}) E(|B_H(1)|^q) \\ &= E(|B_H(1)|^q) C_q^\theta t^{\zeta_\theta(qH)} \\ &= C_q t^{\zeta_X(q)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Par exemple, dans le cas où la mesure multifractale est log-normale, l'exposant s'écrit

$$\zeta_X(q) = \gamma q H - q^2 H^2 (\gamma - 1)$$

En particulier, lorsque $H = 1/2$, l'expression devient

$$\zeta_X(q) = \frac{1}{2}(\gamma q - q^2(\gamma - 1)/2) \quad (2.13)$$

Corrélations Lorsque $H = 1/2$ (on compose avec un mouvement brownien standard), les incréments restent décorrélés mais ne sont plus indépendants. Dans ce cas, on peut calculer exactement la corrélation d'une fonction non linéaire des incréments du processus. En notant $X(t, \tau)$ l'accroissement $X(t + \tau) - X(t)$, on obtient pour les accroissements absolus la formule [CF02]

$$E[|X(0, \tau)X(t, \tau)|^q] = E[|\theta(0, \tau)\theta(t, \tau)|^{\frac{q}{2}}] (E[|B(1)|^q])^2$$

où la fonction de corrélation pour la mesure multifractale, calculée précédemment, décroît hyperboliquement avec le temps t . Ceci permet au processus MMAR de tenir compte du phénomène de longue mémoire observé par exemple sur les marchés financiers.

Choisir $H \neq 1/2$ permet d'avoir des incréments corrélés, positivement si $H > 1/2$ et négativement si $H < 1/2$. La corrélation des accroissements vérifie alors une inégalité de la même forme que la formule précédente.

2.6.3 Conclusions

La construction du processus MMAR repose sur la subordination d'un mouvement brownien fractionnaire par une mesure multifractale. A travers ce changement de temps, le processus acquiert les propriétés de la mesure subordinatrice, essentiellement la multifractalité et la dépendance des incréments. Si la mesure est canonique, le processus ainsi construit présente des moments d'ordre élevé infinis dont le seuil de divergence est là encore contrôlé par la mesure subordinatrice.

2.7 MRW

La mesure multifractale qui intervient dans la construction du processus MMAR étant définie *à priori* sur un intervalle $[0, T]$, une telle procédure est par essence non causale, ce qui est une limitation pratique non négligeable. Par ailleurs, les différents paramètres qui interviennent sont peu intuitifs pour un spécialiste de la modélisation financière, plus habitué à raisonner en termes de volatilité qu'en termes de temps déformé.

La construction de la marche aléatoire multifractale [BDM01b] (**M**ultifractal **R**andom **W**alk) n'est pas, elle, basée sur un modèle de cascade. La multifractalité y est introduite par la dynamique de la volatilité, ce qui rend le modèle plus proche, dans l'esprit, des processus ARCH ou à volatilité stochastique.

2.7.1 Construction

Nous commençons par considérer une version discrétisée du processus :

$$X_{\Delta t}(t) = \sum_{k=1}^{t\Delta t} \delta X_{\Delta t}[k]; \quad \delta X_{\Delta t}[k] = \epsilon_{\Delta t}[k] e^{\omega_{\Delta t}[k]}$$

Les processus ϵ et ω , indépendants l'un de l'autre, vont jouer deux rôles très distincts : ϵ va essentiellement gouverner le signe de l'incrément tandis que ω interviendra sur son amplitude. Les quantités $\epsilon_{\Delta t}[k]$ et $\omega_{\Delta t}[k]$ sont des variables aléatoires gaussiennes, avec les structures de covariance suivantes :

$$\begin{aligned} E(\epsilon_{\Delta t}[j]\epsilon_{\Delta t}[k]) &= \sigma^2 \Delta t \delta_{j,k} \\ E(\omega_{\Delta t}[j]\omega_{\Delta t}[k]) &= \lambda^2 \ln \rho_{\Delta t}[|j - k|] \end{aligned}$$

où

$$\rho_{\Delta t}[\ell] = \begin{cases} \frac{T}{(|\ell|+1)\Delta t} & \text{quand } |\ell| \leq \frac{T}{\Delta t} - 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le modèle fait intervenir trois paramètres : σ , T et λ^2 . σ est simplement la volatilité annuelle moyenne du modèle. T est le temps de décorrélation du processus ω : des variables $\omega(t)$ et $\omega(u)$ éloignées de plus de T sont indépendantes. Il correspondra au temps intégral du processus au delà duquel le comportement multifractal cesse d'exister. Le dernier paramètre λ est sans doute le plus important. Il gouverne la force des corrélations des variables $\omega(t)$: plus λ est important, plus celles-ci sont importantes. Notons que lorsque $\lambda = 0$ le processus ω est dégénéré et devient nul (en effet $E(\omega^2(k)) = 0$).

$\epsilon_{\Delta t}[k]$ est choisi de moyenne nulle et afin que le processus reste de variance finie lorsque Δt tend vers 0, nous devons imposer

$$\begin{aligned} E(\omega_{\Delta t}[k]) &= -Var(\omega_{\Delta t}[k]) \\ &= -\lambda^2 \ln \frac{T}{\Delta t} \end{aligned}$$

Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.

Le choix pour les variables ω_i d'une fonction de corrélation décroissant logarithmiquement avec la distance n'est pas anodin. Elle est en effet de la même forme que celle observée dans certains modèles de cascade multifractale [ABM98]. En physique statistique, plusieurs travaux se sont récemment intéressés à des modèles de désordre présentant la même structure de corrélation : ils mettent en évidence le caractère marginal de ces corrélations notamment en ce qui concerne l'étude des valeurs extrêmes [CLD01].

Plutôt que de définir les variables ω_i par leur structure de corrélation, il est possible de les donner sous une forme intégrale, à la manière de la représentation de Mandelbrot et Van Ness du mouvement brownien fractionnaire

$$\omega_{\Delta t}(t) = \mu + \int_{-\infty}^t K_{\Delta t}(t-u)dB(u)$$

avec un noyau $K_{\Delta t}$ causal, vérifiant l'équation de convolution

$$K_{\Delta t} * K_{\Delta t} = \lambda^2 \ln \rho_{\Delta t}$$

Une transformée de Fourier de l'équation précédente montre que dans le régime $\Delta t \ll \tau \ll T$ le noyau $K_{\Delta t}$ doit se comporter comme

$$K_{\Delta t}(\tau) \sim K_0/\sqrt{\tau}$$

Une telle représentation met clairement en évidence le caractère très particulier du processus de volatilité ω . La lente décroissance du noyau, en $1/\sqrt{\tau}$, est à l'origine des corrélations logarithmiques de la volatilité. Celles-ci apparaissent comme un cas marginal puisque une décroissance du noyau plus lente que $1/\sqrt{\tau}$ conduirait à un processus non-stationnaire.⁵ Le processus de volatilité se situe donc juste à la limite entre stationnarité et non-stationnarité. D'un point de vue financier, c'est une propriété hautement désirable et qui pourrait expliquer la difficulté à trancher entre ces deux zones.

Par exemple, comme le montre [SMM03], elle peut créer de larges chocs de volatilité "endogènes" provenant de l'accumulation, rendue possible grâce à la lente décroissance du noyau de volatilité, d'une multitude de petites variations. Ceci s'oppose à l'explication "exogène", non stationnaire, par des chocs externes. Par exemple, les catastrophes naturelles ou de graves événements humains (guerres, attentats, etc) créent des chocs de volatilité indiscutablement exogènes. En revanche, un krach boursier peut être vu, dans ce cadre, comme un choc endogène ce qui montre la richesse d'une telle modélisation.

Implémentation numérique La seule difficulté vient de la simulation du processus ω qui n'est pas totalement triviale. La méthode que nous avons utilisée fait appel à sa représentation spectrale et utilise une transformée de Fourier rapide. L'algorithme est expliqué en détails en appendice. Très rapide, il autorise la simulation de très longues séries.

Nous donnons un premier aperçu du processus dans la figure 2.6. Comme on peut s'y attendre, plus le paramètre λ est important, plus le processus paraît sauvage avec l'apparition de variations très brutales.

2.7.2 Moments : convergence et lois d'échelle

Pour mettre en évidence la multifractalité du processus MRW, nous allons donner une formule aussi explicite que possible de ses moments et montrer qu'ils obéissent à une loi d'échelle. Nous donnons volontairement une version détaillée des calculs car dans le prochain chapitre nous utiliserons des arguments très semblables lors de calculs avec le SMRW.

Le moment d'ordre q du processus discrétisé (pour simplifier l'écriture nous omettons d'écrire l'indice Δt) s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} E[X(t)]^q &= E \left[\sum_{i=0}^{t/\Delta t} \epsilon(i) e^{\omega(i)} \right]^q \\ &= E \left[\sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \cdots \sum_{i_q=0}^{t/\Delta t} \epsilon(i_1) \cdots \epsilon(i_q) e^{\omega(i_1) + \cdots + \omega(i_q)} \right] \\ &= \sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \cdots \sum_{i_q=0}^{t/\Delta t} E[\epsilon(i_1) \cdots \epsilon(i_q)] E[e^{\omega(i_1) + \cdots + \omega(i_q)}] \end{aligned}$$

⁵Le processus ω représente formellement la limite d'un mouvement brownien H -fractionnaire lorsque H tend vers 0.

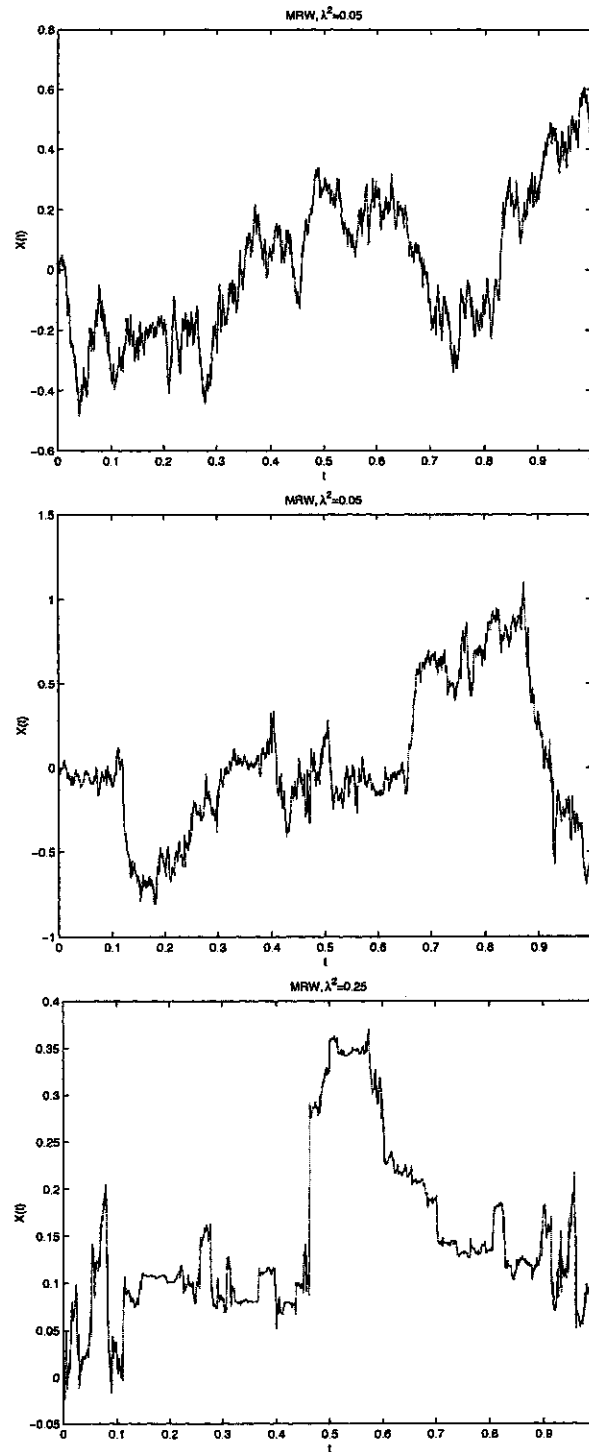


FIG. 2.6: Différentes réalisations de processus MRW : $\lambda^2 \approx 0.01$ en haut, $\lambda^2 \approx 0.05$ au milieu et $\lambda^2 \approx 0.25$ en bas. Plus λ augmente, plus le processus devient sauvage, avec l'apparition de mouvements extrêmes.

grâce à l'indépendance des processus ω et ϵ .

Nous allons maintenant utiliser le théorème de Wick [Wic50] qui affirme que pour des variables gaussiennes $\epsilon_1, \dots, \epsilon_q$ de moyenne nulle

$$E[\epsilon(i_1) \dots \epsilon(i_q)] = \begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ est impair} \\ \sum_{\text{paires}} E[\epsilon_1 \epsilon_2] \dots E[\epsilon_{q-1} \epsilon_q] & \text{si } q \text{ est pair} \end{cases}$$

Moments impairs D'après le théorème de Wick, les moments impairs du processus MRW sont nuls.

Moments pairs En notant $q = 2p$, le théorème de Wick conduit à la formule

$$\begin{aligned} E[X(t)]^{2p} &= \sum_{\text{paires } i_1=0}^{t/\Delta t} \sum_{i_2=0}^{t/\Delta t} \dots \sum_{i_p=0}^{t/\Delta t} E[\epsilon(i_1)\epsilon(i_1)]^2 \dots E[\epsilon(i_p)\epsilon(i_p)]^2 E[e^{2\omega(i_1)+\dots+2\omega(i_p)}] \\ &= \frac{(2p)!}{2^p p!} \sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \dots \sum_{i_p=0}^{t/\Delta t} (\sigma^2 \Delta t)^p E[e^{2\omega(i_1)+\dots+2\omega(i_p)}] \end{aligned}$$

Par ailleurs on peut facilement calculer

$$\begin{aligned} E[e^{2\omega(i_1)+\dots+2\omega(i_p)}] &= \exp \left(2 \sum_{k \in (i_1, \dots, i_p)} E(\omega_k) + 2 \sum_{(k,l) \in (i_1, \dots, i_p)} \text{Var}(\omega_k \omega_l) \right) \\ &= \exp \left(4 \sum_{(k,l) \in (i_1, \dots, i_p)} \text{Var}(\omega_k \omega_l) \right) \\ &= \prod_{(k,l) \in (i_1, \dots, i_p)} \left(\frac{T}{(|k-l|+1) \Delta t} \right)^{4\lambda^2} \end{aligned}$$

Il est à noter le rôle essentiel que joue dans la simplification des calculs l'hypothèse $E(\omega) = -\text{Var}(\omega)$ qui annulent dans l'exponentielle les termes provenant de la moyenne et de la variance de ω pour ne laisser que les termes de covariance.

En utilisant ce résultat, on trouve que

$$E[X(t)]^{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} \sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \dots \sum_{i_p=0}^{t/\Delta t} (\sigma^2 \Delta t)^p \prod_{(k,l) \in (i_1, \dots, i_p)} \left(\frac{T}{(|k-l|+1) \Delta t} \right)^{4\lambda^2}$$

qui devient à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ l'intégrale

$$\begin{aligned} E[X(t)]^{2p} &= \frac{(2p)! \sigma^{2p}}{2^p p!} \int_0^t \dots \int_0^t \prod_{(u_k < u_l)} \left(\frac{T}{|u_k - u_l|} \right)^{4\lambda^2} du_1 \dots du_p \\ &= \frac{(2p)! (\sigma^2 T)^p}{2^p p!} \left(\frac{t}{T} \right)^{p-2p(p-1)\lambda^2} \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{(v_k < v_l)} (|v_k - v_l|)^{-4\lambda^2} dv_1 \dots dv_p \\ &= K_{2p} \left(\frac{t}{T} \right)^{p-2p(p-1)\lambda^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

La raison pour laquelle le terme en Δt présente l'exposant correct, qui conduit à la représentation par une intégrale, est l'annulation dans le terme exponentiel des termes autres que ceux de covariance, ce qui illustre encore une fois l'importance du choix de la moyenne des variables ω_i .

Convergence des moments Le préfacteur K_q fait intervenir une intégrale dont le calcul explicite (pour $q = 2p$ pair) est donné dans [BDM01a]

$$K_{2p} = \frac{(2p)!(\sigma^2 T)^p}{2^p p!} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{\Gamma(1 - 2\lambda^2 i) \Gamma(1 - 2\lambda^2 (i+1))}{\Gamma(2 - 2\lambda^2 (p+i-1)) \Gamma(1 - 2\lambda^2)}$$

D'après les propriétés de la fonction Gamma (divergente pour tout réel négatif ou nul), pour que le préfacteur ne diverge pas il est donc nécessaire que

$$\begin{aligned} \lambda^2 &< 1/2 \\ q &< q^* = 1/\lambda^2 \end{aligned}$$

Pour $\lambda^2 < 1/2$, les moments d'ordre inférieur à q^* du processus discrétisé convergent donc quand $\Delta t \rightarrow 0$ vers une valeur finie. Ce résultat, plus faible qu'une convergence du processus discrétisé lui-même, est le seul dont nous disposons avec cette approche.

Pour $q > q^*$, les moments divergent. Il est donc assez naturel de présumer que la loi de distribution du processus MRW possède des queues parétiennes

$$P(X(t) > x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^{-q^*}$$

Loi d'échelle Par ailleurs, les moments du MRW obéissent à une loi d'échelle dont l'exposant, étendu par prolongement aux moments absolus impairs, est

$$\zeta(q) = \frac{1}{2} [q - q(q-2)\lambda^2] \quad (2.15)$$

Nous remarquons que cette fonction est la même que celle trouvée dans le cas du processus MMAR avec cascade log-normale (équation 2.13) avec la relation

$$\gamma = 1 + 2\lambda^2$$

Nous pouvons préciser quelques valeurs remarquables de cette fonction. Notons tout d'abord que $\zeta(2)$ est constant et vaut toujours 1, c'est à dire que le moment d'ordre 2 du MRW présente un exposant normal, typique du mouvement brownien. $\zeta(q)$ est une fonction qui est croissante jusqu'à $q_1 = 1 + 1/2\lambda^2$ où elle vaut $\zeta(q_1) = 1 + \lambda^2 + 1/4\lambda^2$. Elle est ensuite décroissante et s'annule en $q_2 = 2 + 1/\lambda^2$. Notons également que $\zeta(q^*) = 1$, ce qui est identique au résultat trouvé pour le modèle MMAR.

2.7.3 Corrélations

Dans ce modèle, les incréments sont décorrélés mais non indépendants. Il est aisé de calculer les corrélations entre les valeurs absolues des incréments [BDM01b]

$$\begin{aligned} C_p(l, \tau) &= E(|X(l + \tau) - X(l)|^p |X(\tau)|^p) \\ &= E(|\delta_\tau X(l)|^p |\delta_\tau X(0)|^p) \\ &\sim (K_p)^2 \left(\frac{\tau}{T}\right)^{2\zeta_p} \left(\frac{T}{l}\right)^{\lambda^2 p^2} \text{ pour } \tau \ll l \ll T \end{aligned}$$

où K_p a été défini précédemment.

Le cas particulier $p = 2$ est particulièrement intéressant en finance puisqu'il quantifie les corrélations de la volatilité à τ fixé

$$C_2(l, \tau) \sim \left(\frac{T}{l}\right)^{4\lambda^2}$$

Ces corrélations en fonction de l suivent donc une loi puissance et peuvent être considérées comme extrêmement persistantes si T est suffisamment grand.

Il est également possible de calculer les corrélations des logarithmes des accroissements

$$\begin{aligned} C_0(l, \tau) &= E(\ln |\delta_\tau X(l)| \ln |\delta_\tau X(0)|) \\ &\sim -\lambda^2 \ln(l/T) \end{aligned}$$

qui, à τ fixé, est de la même forme que les corrélations des variables "microscopiques" ω .

2.7.4 Estimations des paramètres

Il y a trois paramètres à estimer pour ce processus : σ , λ^2 et T .

Le premier peut être simplement estimé par la volatilité empirique des cours. Le paramètre λ^2 peut être évalué de deux manières différentes [MDB00]. La première consiste à tracer la fonction $\zeta(q)$ et à en tirer la valeur de λ^2 correspondant à la meilleure forme théorique. Une seconde façon de procéder est d'utiliser les résultats précédents en traçant par exemple la fonction $C_0(l, \tau)$ en fonction de $\ln(l)$. On doit observer une droite dont la pente vaut $-\lambda^2$. Par ailleurs, l'ordonnée à l'origine de cette fonction permet de trouver la valeur de $\ln(T)$. Ces procédures ne fournissent toutefois que des valeurs indicatives de ces paramètres. En particulier, T n'est estimé qu'à travers son logarithme et il est donc susceptible d'être très bruité. Par ailleurs, nous n'avons pas étudié les différentes propriétés statistiques (consistance, vitesse de convergence) des estimateurs de ces quantités et un tel travail serait souhaitable afin de garantir des estimations plus fiables. Notons qu'en raison des fortes corrélations présentes dans le modèle, ce programme n'est sans doute pas trivial.

Les valeurs couramment observées sont pour T de l'ordre de quelques années et pour λ^2 autour de 0.03 [MDB00]. Ces valeurs typiques de λ^2 conduisent pour la distribution des rendements à un exposant de queue $1/\lambda^2$ autour de 35. Ceci ne correspond pas aux valeurs observées sur les marchés qui sont elles proches de 3. Il est toutefois possible d'alourdir les queues du processus MRW sans changer ses propriétés multifractales. Il suffit de considérer des variables ϵ qui ne

sont plus gaussiennes mais distribuées selon une loi plus large comme, par exemple, une loi de Student. En procédant ainsi, seul change le préfacteur tandis que les propriétés d'échelle, gouvernées par la structure de corrélation des variables $\omega[i]$, sont préservées.

2.7.5 Mouvement fractionnaire

Il est également possible d'utiliser pour ϵ , à la place d'un bruit blanc, un bruit fractionnaire. Les calculs sont détaillés en appendice. Là encore on trouve une loi d'échelle, d'exposant

$$\zeta_H(q) = qH - \lambda^2 q(q-1)/2$$

Toutefois, la construction utilisant un bruit fractionnaire est très différente de celle avec un bruit blanc (voir l'appendice pour plus de précisions). En particulier, on remarque que la limite $H \rightarrow 1/2$ de l'exposant d'échelle est singulière et ne correspond pas à l'exposant trouvé précédemment avec le bruit blanc.

Par ailleurs, la valeur $H^* = (1 + \lambda^2)/2$ conduit à un exposant $\zeta_{H^*}(2) = 1$ correspondant à un comportement diffusif normal. Ce résultat est assez surprenant puisque le bruit fractionnaire utilisé dans la construction présente, lui, une loi d'échelle anormale. Ceci suggère qu'une étude plus approfondie serait sans doute nécessaire pour saisir toutes les subtilités de la construction.

2.7.6 Conclusions

Le processus MRW que nous venons de présenter n'est pas construit sur un modèle de cascade sous-jacent. Ses propriétés proviennent de la forme très particulière de la fonction de corrélation de sa log-volatilité. Il est possible de mener beaucoup de calculs explicitement avec ce modèle. En particulier, nous sommes capables de donner la formule explicite de l'exposant d'échelle dont la non-linéarité traduit le caractère multifractal du processus.

2.8 Autres travaux

2.8.1 Points à améliorer dans les deux approches

Malgré l'évidente proximité de ces deux processus qui partagent beaucoup de leurs propriétés, ils sont construits de manière très différente l'un de l'autre et chacun possède ses propres qualités et défaut.

Le modèle MMAR que nous avons présenté précédemment présente au moins deux défauts majeurs :

- il dépend de la construction d'une mesure multifractale *à priori*, autrement dit il n'est pas causal.
- la mesure multifractale utilisée possède une rigidité b -adique.

Le processus MRW lui ne présente pas ces inconvénients. En revanche ses propriétés limites sont moins bien connues : seule est démontrée la convergence de ses moments lorsque le pas de discrétisation tend vers 0. L'existence d'un processus limite elle n'est pas assurée.

Les travaux que nous allons maintenant présenter sont des extensions des précédents qui résolvent au moins en partie les problèmes soulevés précédemment et dont l'application future en finance pourrait se révéler très fructueuse.

Notons toutefois qu'une limitation commune aux deux approches subsiste même après ces extensions : les processus obtenus restent nécessairement symétriques, ce qui d'un point de vue de la modélisation peut être un sérieux handicap. Nous reviendrons en détail sur ce point dans le prochain chapitre.

2.8.2 Travaux de Calvet et Fisher

Dans [CF01], les auteurs présentent une extension très intéressante du modèle MMAR. Leur but premier est de s'affranchir de la contrainte b -adique dans la construction initiale du processus MMAR.

Au lieu de diviser à chaque étape un intervalle en b sous-intervalles de manière déterministe, ils proposent de rendre aléatoires les instants où les multiplicateurs changent et les tirent suivant une loi de Poisson, dont l'intensité progresse géométriquement à chaque étape. Le reste de la construction est similaire à [MFC97]. Le processus PMM (Poisson Multifractal Model) obtenu possède des propriétés comparables à celles du processus MMAR mais présentent en plus une invariance d'échelle continue et non plus restreinte aux intervalles b -adique.

Par ailleurs, grâce au choix du processus de Poisson, leur construction hérite d'une structure markovienne. Ceci leur permet de bâtir un processus discrétisé approximant, qui converge vers le processus PMM précédent, mais dont la construction est causale et peut se faire lorsque le temps progresse.

L'extension du processus MMAR proposée dans [CF01] résout donc deux des défauts signalés précédemment : l'invariance d'échelle est maintenant strictement continue et une construction causale du processus est disponible. Les auteurs proposent et développent également certaines méthodes statistiques d'estimation de leur processus ce qui représente également une avancée indéniable.

2.8.3 Travaux de Bacry et Muzy

Bacry et Muzy s'inspirent des travaux de [BM02] sur les produits de "pulses" multifractals, qui font eux aussi appel à un processus de Poisson, et des travaux de [Sm01] sur les cascades multiplicatives continues pour tenter de présenter une version unifiée de la construction des différents processus multifractals. L'idée générale est de trouver une manière de rendre continue les constructions "classiques" par cascades discrètes. Leur principal outil, qui préserve une certaine intuition géométrique, est une intégration sur un domaine conique d'une mesure aléatoire infiniment divisible. Cette approche, plus technique que celle de [BDM01b], y gagne en généralité puisqu'elle englobe notamment celles de [BM02] et [BDM01b] et permet d'étudier l'existence des processus limites considérés. En revanche la mise en oeuvre pratique d'un tel modèle, tant sur le plan de la simulation que de l'estimation, semble beaucoup plus ardue. Il serait par ailleurs intéressant de voir comment ces travaux se comparent à d'autres, contemporains, qui font appel au même type d'arguments [CRA02, Sch03b]

2.9 Multifractalité dans les séries financières

L'intérêt pour les processus multifractals en finance étant relativement neuf, la littérature dans ce domaine est encore relativement peu abondante mais plusieurs études [VA98, PS99,

PS00, SSL00, MDB00, CF01, CF02, MAS03] l'ont déjà mise en évidence à l'aide de différentes méthodes : ondelettes [AMS98], MDFA [MAS03] ou fonction de structure [CF01, CF02].

Multifractalité du SP500 Dans cette partie nous appliquons la méthode de la fonction de structure pour mettre en évidence la multifractalité du S&P 500. Nous disposons des données journalières de janvier 1953 à juin 2001, soit 12184 observations. Nous nous intéressons en fait au logarithme de cette série auquel nous avons ôté la tendance quotidienne. Nous avons ensuite évalué les différents moments $E(|X(t+\ell) - X(t)|^q)$ par leur moyenne empirique $M(q, \ell)$. L'hypothèse de multifractalité doit se traduire par un tracé linéaire de $M(q, \ell)$ en fonction de $\log(\ell)$. Ceci est confirmé sur la figure 2.7, au moins pour les premières valeurs de q . Pour des q supérieurs à 5, les fluctuations statistiques sont amplifiées et, si les tracés conservent une allure qualitativement linéaires, l'incertitude est grande et la signification statistique des résultats obtenus est sujette à caution. L'exposant $\zeta(q)$, obtenu par régression linéaire, est tracé sur

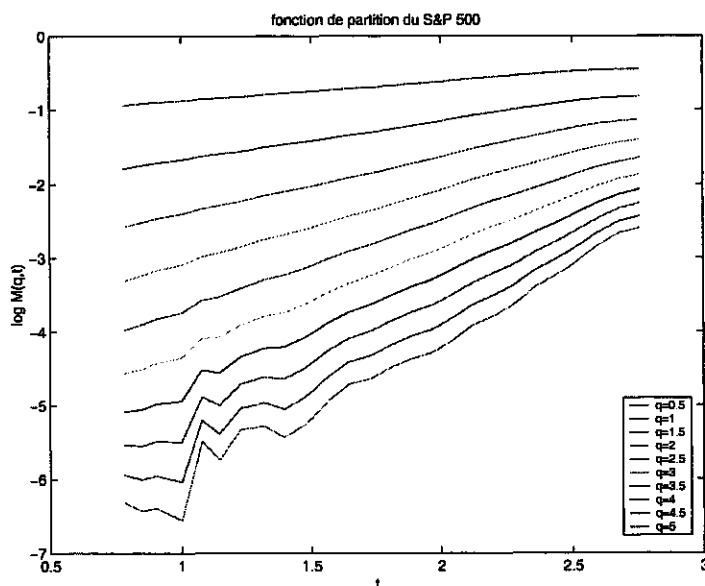


FIG. 2.7: Fonction de partition pour le logarithme du S&P 500, pour q variant de 0 à 5. Les propriétés scalantes de la série se traduisent par des tracés linéaires. Pour des q supérieurs, les fluctuations, élevées à une grande puissance, sont amplifiées et l'observation perd de sa signification statistique.

la figure 2.8. Nous l'avons tracé jusqu'à $q = 5$, considérant que au-delà les barres d'erreurs étaient trop importantes. La forte non linéarité du graphe obtenu témoigne du caractère multifractal de la série observée. Une régression de cette dernière courbe nous donne une valeur de λ^2 égale à 0.069, assez différente de celles reportées dans [MDB00], mais les séries sur lesquelles nous avons travaillé ne sont peut-être pas tout à fait comparables à celles de [MDB00]. Une autre explication, plus inquiétante, serait le manque de robustesse de notre méthode d'estimation : en effet les régressions ne sont pas toujours excellentes et nous ne contrôlons pas quantitativement ces fluctuations. Il semble donc important de développer des outils statistiques pour mieux contrôler ces étapes et assurer la validité de nos résultats.

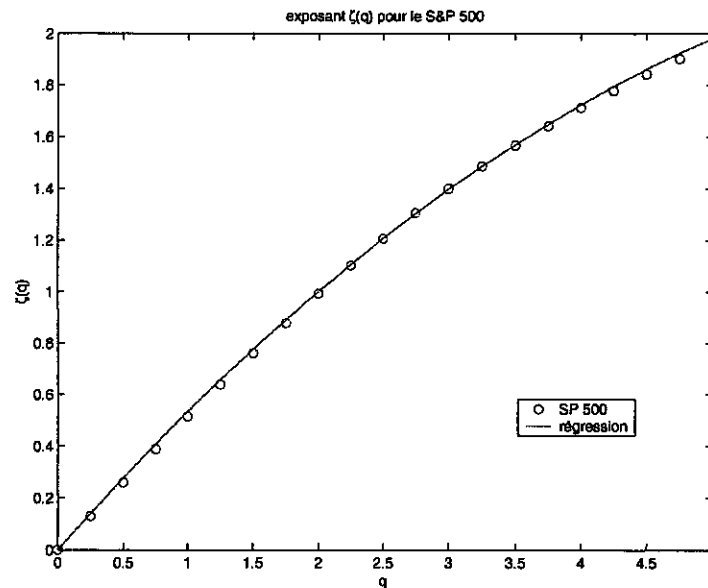


FIG. 2.8: Tracé de l'exposant $\zeta(q)$ en fonction de q . La multifractalité se traduit par la forte non linéarité de l'exposant. Nous avons surimposé la courbe théorique du processus MRW avec $\lambda^2 = 0.069$ qui semble bien en accord avec la réalité.

Les apparences sont-elles trompeuses ? Même si l'étude précédente (et d'autres [FCM97, CF02, MDB00] dans la littérature!) semble indiquer l'existence de multifractalité dans les cours financiers, plusieurs chercheurs se demandent si les lois d'échelle observées dans les séries financières ne seraient pas apparentes et très largement trompeuses.

Ainsi dans [BNP00] les auteurs s'intéressent aux lois d'échelle pour les rendements absolus observés par [MDO⁺90, GDD⁺97] sur les taux de change (il n'est pas ici question de multifractalité puisqu'on ne s'intéresse qu'à une loi d'échelle pour une seule puissance). Ils montrent qu'un processus normal inverse gaussien (NIG) exhibe, pour les valeurs limites de paramètres du processus, une loi d'échelle distincte de celle observée par [MDO⁺90, GDD⁺97]. Pourtant, pour une gamme de paramètres distincte de la limite considérée précédemment, la simulation du processus conduit à une loi d'échelle empirique apparente, proche des valeurs observées dans [MDO⁺90, GDD⁺97]. Par ailleurs, l'introduction d'asymétrie dans leur processus renforce cette illusion, ce qui pousse les auteurs à s'interroger sur la validité théorique des résultats de [MDO⁺90, GDD⁺97].

Plus récemment Bouchaud, Potters et Meyer [BPM00] ont proposé un modèle monofractal (qui inspira en fait la construction du processus MRW), mais où de très fortes corrélations empêchent en pratique d'observer ce régime et conduisent à une multifractalité apparente. Les séries financières présentant elles aussi de fortes corrélations (non linéaires), les auteurs en concluent qu'il est difficile voire impossible de trancher entre multifractalité vraie ou seulement apparente. LeBaron fait la même constatation dans [LeB01] avec un modèle à volatilité stochastique, non invariant d'échelle.

Dans le même ordre d'idées, Dragulescu et Yakovenko [DY02] ont utilisé un modèle d'Heston,

qui, possédant une échelle caractéristique de relaxation, n'est pas multifractal. Ils montrent que celui-ci peut toutefois remarquablement bien reproduire les distributions sur lesquelles on se calibre et ce pour plusieurs échelles de temps simultanées.

La frontière pratique entre un bon modèle de cours et un processus multifractal théorique apparaît donc très ténue et il sera sans aucun doute nécessaire de développer des techniques d'estimation plus fines pour trancher cette question.

2.10 Drawdowns

Un problème qui nous a récemment intéressé dans le cadre du processus MRW (et auquel nous n'apporterons qu'une réponse partielle et encore largement spéculative) est la distribution des "drawdowns" [BP00, p 112].

DÉFINITION 2.10.1 (DRAWDOWN)

Etant donné un processus $(X(t), t \in \mathbb{R}^+)$, avec une tendance positive, $E(X(t)) > 0$, nous appelons drawdown la quantité

$$\Lambda = X(0) - \min_{t>0} X(t)$$

Ce problème, relié à l'étude des probabilités de ruine en assurance, a déjà été largement discuté dans le cas de processus discrets à incréments indépendants [Ver77, Kor97] mais il se révèle bien plus complexe dans le cas où les accroissements sont dépendants [MS00a]. Il a également été envisagé pour des processus de diffusion [BK98]. Il nous semble être une question particulièrement pertinente en finance et en particulier pour l'étude de risques extrêmes. Il pourrait également trouver des applications dans l'étude d'options exotiques de type barrière ou lookback.

Nous suggérons une approche beaucoup plus simple et moins précise que les précédentes et qui a pour but de déterminer le comportement de la queue de la distribution des drawdowns.

2.10.1 Résultats exacts pour un mouvement brownien biaisé

La distribution des drawdowns est connue exactement dans le cas d'un mouvement brownien W^μ biaisé, de drift $\mu > 0$ et de volatilité σ [KS88, p 197].

$$P(\Lambda > x) = \exp[-2\mu x/\sigma^2] \quad (2.16)$$

Cette loi se vérifie facilement empiriquement comme le montre la figure 2.9. La loi exponentielle précédente fait apparaître une taille caractéristique de ces drawdowns

$$\Lambda_0 = \sigma^2/\mu$$

qui peut s'interpréter simplement. Soit T_0 le temps à partir duquel le caractère transient l'emporte sur l'aspect diffusif du processus. Une façon de le déterminer est de dire qu'à cet instant les deux effets doivent avoir la même amplitude soit

$$\mu T_0 = \sigma \sqrt{T_0}$$

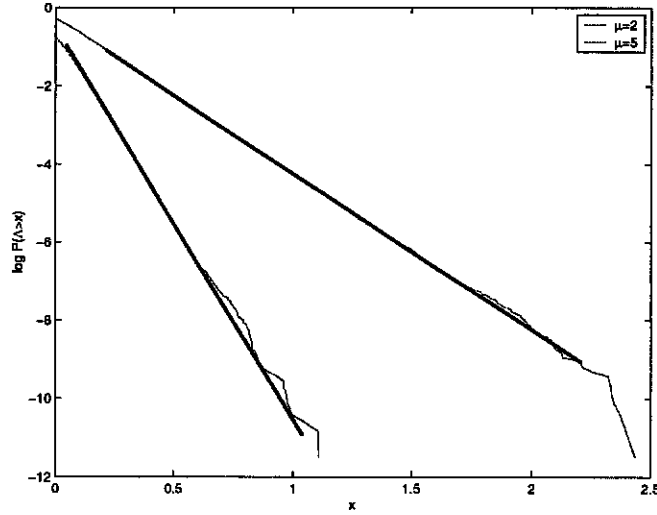


FIG. 2.9: Tracé de $\log P(\Lambda > x)$ contre x , avec $\sigma = 1$ et $\mu = 2$ ou 5 . Nous avons également tracé la prédiction théorique, en parfait accord avec les quantités empiriques.

d'où

$$T_0 = \sigma^2 / \mu^2$$

La taille caractéristique du drawdown apparaît alors comme le niveau moyen du mouvement brownien drifté à l'instant T_0

$$\Lambda_0 = \mu T_0$$

2.10.2 Intégrales de chemin

Il est possible de retrouver le résultat précédent par la méthode, populaire en physique mais encore mal définie mathématiquement, des intégrales de chemin [FH65, Roe94].

Soit x un mouvement brownien, issu de 0, de drift μ et de volatilité σ . À T la densité de probabilité du processus peut s'écrire, au moins formellement

$$p(x_T = -\Delta) = \int_{x(0)=0}^{x(T)=-\Delta} e^{-\int_0^T (\dot{x} - \mu)^2 / 2\sigma^2 dt}$$

où $\mathcal{D}[x]$ est une mesure sur l'espace des chemins [Roe94]. L'intégrale précédente peut être évaluée en trouvant le chemin apportant la contribution majeure⁶. Celui-ci doit minimiser le terme dans l'exponentielle (approximation de la phase stationnaire) d'où l'équation

$$\frac{\delta}{\delta x} \int_0^T \frac{(\dot{x} - \mu)^2}{2\sigma^2} dt = 0$$

⁶En physique statistique ce chemin est connu sous le nom d'instanton

où $\frac{\delta}{\delta x}(\cdot)$ est une dérivée fonctionnelle.

Une intégration par parties conduit au résultat, lorsque σ et μ sont constants⁷

$$\dot{x}(t) = K$$

La condition finale en T s'écrit

$$x(T) = KT = -\Delta$$

d'où l'équation de l'instanton

$$x(t) = -\Delta \frac{t}{T}$$

et une densité de probabilité

$$\begin{aligned} p(x_T = -\Delta) &\sim \exp\left(-\int_0^T \left(\frac{\Delta}{T} + \mu\right)^2 / 2\sigma^2 dt\right) \\ &\sim \exp\left(-T\left(\mu + \frac{\Delta}{T}\right)^2 / 2\sigma^2\right) \end{aligned}$$

L'instant $T_\Delta = \frac{\Delta}{\mu}$ auquel cette densité est maximale peut être interprété comme l'instant typique d'occurrence d'un drawdown d'amplitude Δ d'où une densité des drawdowns de la forme

$$\begin{aligned} p(\Delta) &\sim \exp\left(-T\Delta\left(\mu + \frac{\Delta}{T\Delta}\right)^2 / 2\sigma^2\right) \\ &\sim \exp\left(-2\mu\Delta / \sigma^2\right) \end{aligned}$$

2.10.3 Cas du processus MRW

Il est sans doute possible d'utiliser le résultat précédent pour avoir une idée de la queue de distribution des drawdowns dans le cas du processus MRW.

Conditionnellement à la donnée des variables ω_i , qui dirigent la volatilité du processus MRW, le processus MRW est un processus gaussien, dont la volatilité à un temps t est donnée par

$$\sigma_t^2[\omega] = \int_0^t \exp(2\omega_u) du$$

En s'inspirant de l'étude précédente, on peut conjecturer pour la distribution conditionnelle des drawdowns dans le cas du processus MRW biaisé une forme

$$P^{[\omega]}(\Lambda > x) = \exp(-2\mu x / \sigma^2[\omega])$$

où $\sigma^2[\omega]$ est une volatilité moyenne

$$\sigma^2[\omega] = \sigma_{T^x}^2[\omega] / T^x$$

⁷La même méthode donne le résultat plus général $\dot{x}(t) = 2\mu(t) + K\sigma^2(t)$ avec la condition finale $x(T) = 2\int_0^T \mu + K\int_0^T \sigma^2 = -\Delta$

et T_x est le temps caractéristique moyen d'un drawdown d'amplitude x . La distribution inconditionnelle s'obtient alors en moyennant suivant la variable $\sigma^2[\omega]$

$$P(\Lambda > x) = \int_{\sigma^2[\omega]} \exp(-2\mu x/\sigma^2[\omega]) p(\sigma^2[\omega]) d\sigma^2[\omega]$$

Le calcul exact de cette intégrale est sans doute une tâche difficile mais il est possible de déterminer son comportement à x grand.

En effet, la fonction de distribution $q(x)$ à un temps t du processus MRW peut, en suivant le même raisonnement, s'écrire d'une façon très proche

$$q(x, t) = \int_{\sigma_t^2[\omega]} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2[\omega]}} \exp(-x^2/2\sigma_t^2[\omega]) p(\sigma_t^2[\omega]) d\sigma_t^2[\omega]$$

qui peut encore se réécrire

$$q(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp(-x^2/2v) p(v) dv$$

Or, nous l'avons vu précédemment, cette distribution présente des queues décroissant comme x^{-1-1/λ^2} . Un tel comportement est possible si, au moins pour v grand, $p(v)$ se comporte comme une loi puissance

$$p(v) \sim v^{-\alpha}$$

avec

$$\alpha = 1 + 1/2\lambda^2$$

En admettant que les distributions des variables $\sigma^2[\omega]$ et $\sigma_t^2[\omega]$ restent proches l'une de l'autre (ce qui revient en quelque sorte à négliger l'influence des fluctuations provenant de T^8), 2.10.3 peut se réécrire

$$\begin{aligned} P(\Lambda > x) &= \int_0^{+\infty} \exp(-2\mu x/v) p(v) dv \\ &\simeq \int_0^{+\infty} \exp(-2\mu x/v) v^{-\alpha} dv \\ &\sim x^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Nous prévoyons donc pour le processus MRW une distribution des drawdowns avec des queues parétiennes d'exposant $1 + 1/2\lambda^2$, soit encore

$$P(\Lambda > x) \underset{\infty}{\sim} x^{-1/2\lambda^2} \quad (2.17)$$

Notons que cet exposant ne dépend pas de la valeur du drift, qui n'intervient que dans la valeur du préfacteur. Le comportement que nous prévoyons est donc très différent du cas brownien et en particulier les drawdowns ne devraient plus présenter d'échelle typique.

Nous avons testé cette prédiction numériquement. Nous avons calculé les drawdowns sur un

⁸Une estimation plus précise passe sans doute par la prise en compte de ce facteur.

million de trajectoires pour différents λ^2 . Les résultats sont reportés sur la figure 2.10 où nous avons tracé $\log P(\Lambda > x)$ en fonction de $\log(x)$ pour $\lambda^2 = 0.10$, $\lambda^2 = 0.20$ et $\lambda^2 = 0.25$ dans le cas où $\mu = 10$. Si notre prédiction est juste, on devrait observer un comportement linéaire avec des pentes respectives de -5 , $-5/2$ et -2 (tracées également). Cette hypothèse, sans être catégoriquement exclue par nos simulations, est loin d'être démontrée. Si les pentes sont acceptables pour les grandes valeurs de λ^2 , la démonstration n'est pas convaincante pour $\lambda^2 = 0.1$. De plus nos tracés restent systématiquement incurvés.

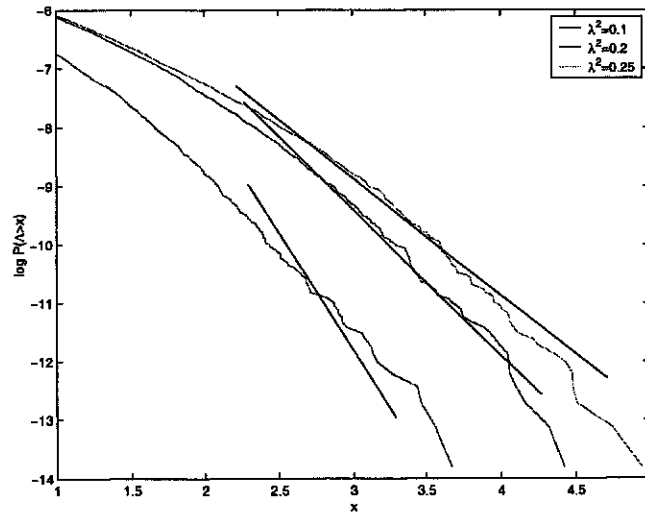


FIG. 2.10: Tracé de $\log P(\Lambda > x)$ contre $\log x$ pour $\lambda^2 = 0.10, 0.20$ et 0.25 . Notre prédiction prévoit un comportement linéaire avec une pente en $-1/2\lambda^2$, également tracées sur la figure. L'accord n'est qu'approximatif, surtout pour $\lambda^2 = 0.1$. Dans tous les cas nous observons une courbure systématique de nos tracés.

Par ailleurs, il est indéniable que d'autres représentations donnent apparemment de bien meilleurs résultats qu'une loi puissance. Par exemple, sans qu'aucun argument ne supporte cette hypothèse, $P(\Lambda > x)$ semble bien représentée par une exponentielle étirée $\exp(-x^\beta)$ comme le montre la figure 2.11. Notons qu'intuitivement ce comportement n'est pas celui auquel on peut s'attendre. En effet, une telle loi décroît plus vite que toute loi puissance et a tous ses moments finis. Or, le processus MRW présente des queues épaisses et il paraît naturel que les drawdowns, qui impliquent le minimum sur la trajectoire, aient une distribution qui ne décroisse pas plus vite que celle des incréments eux-mêmes.

Il est possible que notre simulation, qui en particulier fait intervenir un temps de discrétisation Δt fini, ne soit pas suffisamment précise pour observer le bon comportement et nous espérons améliorer cette étude numérique par la suite.

2.10.4 Conclusions

Notre étude des drawdowns dans le cadre du processus MRW reste inachevée. Nos simulations ont mis en évidence le caractère large de leur distribution, qui décroît beaucoup moins vite qu'une exponentielle. Néanmoins, elles ne permettent pas de confirmer (sans pour

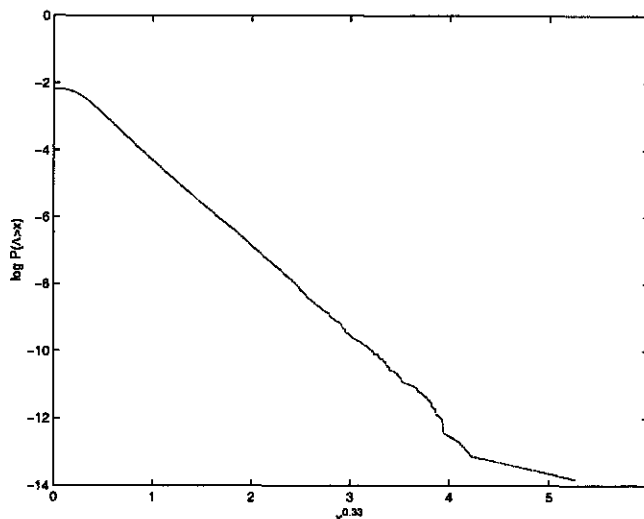


FIG. 2.11: Tracé de $\log P(\Lambda > x)$ contre $x^{0.33}$ pour $\lambda^2 = 0.20$. Le tracé est étonnamment linéaire bien que nous ne puissions apporter aucune justification théorique supportant cette observation.

autant l'infirmier complètement) notre prédiction d'un comportement en loi puissance et il est probable qu'une subtilité nous échappe dans la compréhension du problème. Nos conjectures, qui peuvent sembler raisonnables au premier abord, ne sont peut-être pas si élémentaires et une étude plus poussée est encore nécessaire. Néanmoins, nous pensons que l'idée de raisonner conditionnellement à la donnée de la volatilité (ce qui permet en quelque sorte de geler le désordre) est intéressante et nous espérons pouvoir lui donner rapidement une formulation plus rigoureuse.

Enfin, d'autres questions mériteraient également d'être abordées, comme par exemple l'étude, proche de la précédente, de la persistance du processus MRW.

Chapitre 3

Processus multifractal asymétrique

3.1 Motivation

Les différents processus multifractals que nous avons présentés dans le chapitre précédent, et à notre connaissance chaque construction proposée dans la littérature, souffrent d'une même limitation : le processus est symétrique.

Ceci est particulièrement regrettable pour la modélisation financière puisque les cours présentent une forte asymétrie qu'il est impératif, d'un point de vue opérationnel, de prendre en compte, tant il est vrai qu'une baisse des cours n'a pas le même impact qu'une hausse. Mais un tel processus pourrait également trouver son intérêt dans l'étude de la turbulence, lieu de prédilection pour l'utilisation des processus multifractals.

L'idée de départ pour introduire cette asymétrie s'inspire de l'effet "leverage" mis en évidence dans le premier chapitre : nous voulons construire un processus multifractal où les accroissements passés sont corrélés avec les volatilités futures. Après avoir expliqué en détail la construction d'une telle marche aléatoire multifractale asymétrique (**S**kewed **M**ultifractal **R**andom **W**alk), nous mettons en évidence son caractère multifractal en calculant l'exposant d'échelle pour les moments pairs et impairs. Dans le cas pair, nous retrouvons le comportement du MRW tandis que le cas impair exhibe une forte déviation par rapport au cas précédent. Nous montrons ensuite le lien entre SMRW et effet HARCH, puis une application à la valorisation d'options.

3.2 SMRW

3.2.1 Construction

Nous modifions la construction du processus MRW pour tenir compte de l'asymétrie en considérant le processus

$$\delta X_{\Delta t}[k] = \epsilon_{\Delta t}[k] e^{\tilde{\omega}_{\Delta t}[k]} \quad \tilde{\omega}_{\Delta t}[k] \equiv \omega_{\Delta t}[k] - \sum_{i < k} K(i, k) \epsilon_{\Delta t}[i],$$

Les processus $\epsilon_{\Delta t}$ et $\omega_{\Delta t}$ restent inchangés par rapport au cas symétrique : $\epsilon_{\Delta t}$ est un bruit blanc, à priori gaussien, de moyenne nulle et $\omega_{\Delta t}$ est un processus gaussien, indépendant du

précédent, avec la structure de corrélation

$$E(\omega_{\Delta t}[j]\omega_{\Delta t}[k]) = \lambda^2 \ln \rho_{\Delta t}[|j - k|]$$

où

$$\rho_{\Delta t}[\ell] = \begin{cases} \frac{T}{(|\ell|+1)\Delta t} & \text{quand } |\ell| \leq \frac{T}{\Delta t} - 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus on impose que $\omega_{\Delta t}$ soit de moyenne $E(\omega_{\Delta t}) = -Var(\omega_{\Delta t}) = -\lambda^2 \ln(T/\Delta t)$.

La nouveauté vient du noyau $K(i, k)$ qui contrôle l'influence des accroissements aux temps i sur la (log)-volatilité à un temps ultérieur k . Pour préserver les propriétés multifractales du processus, il est impératif de ne pas introduire de nouvelle échelle de temps d'où le choix d'un noyau décroissant selon une loi puissance et qui ne présente donc aucune échelle caractéristique :

$$K(i, j) = \frac{K_0}{(j - i)^\alpha \Delta t^\beta} \quad (j > i).$$

Nous avons également envisagé un modèle du type

$$\delta X_{\Delta t}[k] = \epsilon_{\Delta t}[k] e^{\omega_{\Delta t}[k] - \sum_{i < k} K(i, k) \text{sign}(\epsilon_{\Delta t}[i])}$$

où seul le signe de l'incrément passé aurait un effet sur la volatilité passée. Plus généralement, on peut moduler l'importance accordée à l'amplitude de l'incrément en considérant un modèle de la forme

$$\delta X_{\Delta t}[k] = \epsilon_{\Delta t}[k] e^{\omega_{\Delta t}[k] - \sum_{i < k} K(i, k) |\epsilon_{\Delta t}[i]|^\gamma \text{sign}(\epsilon_{\Delta t}[i])}$$

Plus γ est important, plus on favorise l'influence des variations de grande amplitude mais rien de fondamentalement différent n'est obtenu avec de telles extensions de notre modèle initial. Nous nous concentrons donc dans la suite sur l'étude du SMRW initial.

3.2.2 Implémentation numérique

La génération des variables aléatoires $\omega[k]$ se fait de la même façon que précédemment en suivant l'algorithme expliqué dans l'appendice. Le point principal est maintenant de calculer efficacement le terme d'asymétrie $\sum_{i < k} K(i, k) \epsilon[i]$. La stratégie naïve qui consisterait à calculer directement cette somme à chaque étape n'est pas exploitable en pratique car le nombre de termes à calculer augmente à chaque incrément du pas de temps et le temps de calcul devient vite trop important pour des grandes séries. Une façon plus agréable de voir et de calculer ce terme est de le réécrire sous la forme d'un produit de convolution.

Pour cela, nous générons une série de $2n$ variables gaussiennes indépendantes $\eta[i]$. Les n premières serviront effectivement à définir les variables ϵ des incréments $\epsilon[k]e^{\tilde{\omega}[k]}$ tandis que les autres représenteront virtuellement les n ϵ des n accroissements avant l'origine. Pour calculer la somme $\sum_{i < k} K(i, k) \epsilon[i]$, nous redéfinissons, à chaque étape, la série $\tilde{\epsilon}[i]$ en la périodisant

$$\tilde{\epsilon}[i] = \begin{cases} \eta[i] & \text{si } 0 \leq i < k \\ \eta[i + 2n] & \text{si } k - 2n \leq i < 0 \end{cases}$$

et nous considérons le noyau modifié

$$\bar{K}(i, k) = \begin{cases} K(i, k) & \text{si } 0 < k - i \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est facile de voir que le terme d'asymétrie peut maintenant s'écrire

$$\sum_{i=k-2n}^{k-1} \bar{K}(i, k) \bar{\epsilon}[i]$$

qui présente en outre l'avantage d'incorporer l'influence des n accroissements virtuels. Par ailleurs l'utilisation de ces n pseudo-variables et du cut-off imposé au noyau $\bar{K}(i, k)$ empêche toute corrélation parasite entre volatilités passées et accroissements futurs dans notre construction.

Le produit de convolution $\sum_{i=k-2n}^{k-1} \bar{K}(i, k) \bar{\epsilon}[i]$ peut se calculer très efficacement en utilisant à nouveau une transformée de Fourier rapide [VTP93]. L'utilisation systématique de cet algorithme pour la simulation des variables corrélées $\omega[k]$ et le calcul de la fonction d'asymétrie rend la procédure totale très efficace et permet la simulation de longues séries.

Nous présentons sur la figure 3.1 une réalisation du processus SMRW. Pour illustrer l'effet de la fonction d'asymétrie, nous avons également représenté la série obtenue en utilisant systématiquement les variables $-\epsilon[k]$. Alors que dans le cas du MRW les deux courbes sont symétriques, ce n'est plus vrai pour le SMRW.

3.3 Lois d'échelle

Dans la suite nous posons $t = n\Delta t$ et nous nous intéressons au régime $1 \ll n \ll N = T/\Delta t$. Pour simplifier les notations, nous omettrons les indices Δt .

3.3.1 Second moment

Le second moment s'écrit

$$\begin{aligned} E[X_t^2] &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \delta X(i)\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} E[\epsilon(i)^2] E[e^{2\tilde{\omega}(i)}] \\ &= \sigma^2 \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} E[e^{2\omega(i)}] E\left[e^{-2 \sum_{k<i} \frac{K_0}{(i-k)^\alpha \Delta t^\beta} \epsilon(k)}\right] \\ &= \sigma^2 \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} e^{2K_0^2 \sigma^2 \Delta t^{1-2\beta} \sum_{k<i} \frac{1}{(i-k)^{2\alpha}}} \end{aligned}$$

Nous faisons maintenant les hypothèses

$$\begin{aligned} \alpha &> 1/2 \\ \sigma^2 K_0^2 \Delta t^{1-2\beta} &\ll 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

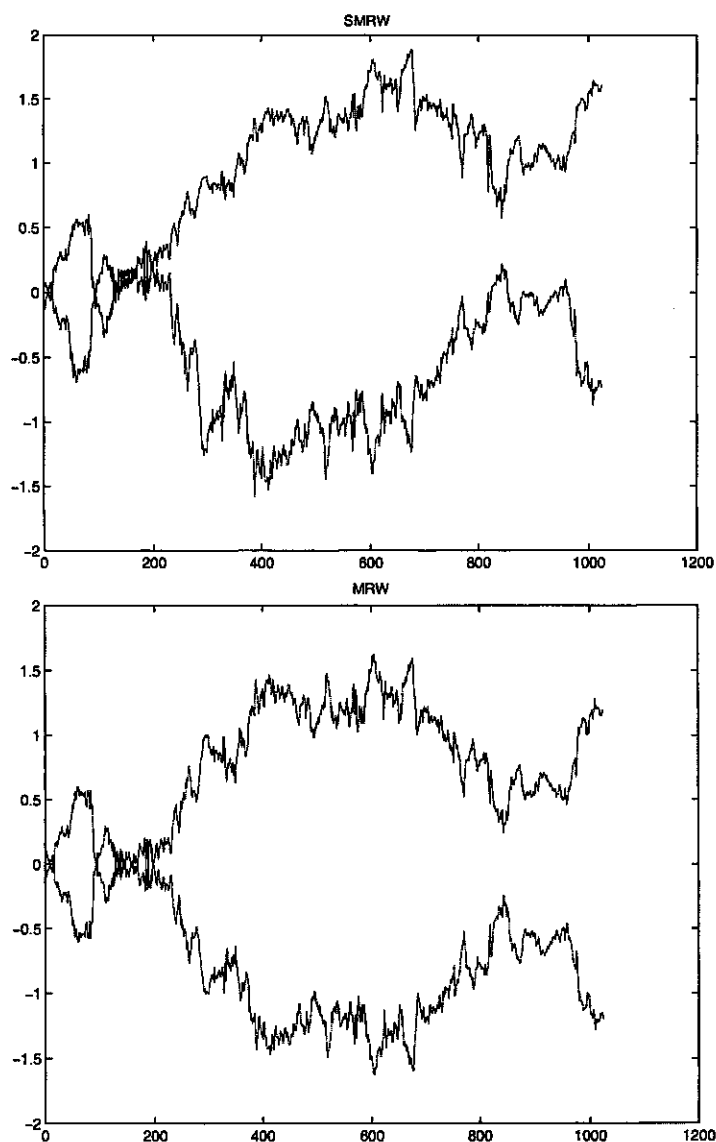


FIG. 3.1: Exemple de réalisation du processus SMRW (en haut). Pour illustrer l'effet du noyau d'asymétrie K nous avons tracé le processus obtenu avec les variables $-\epsilon[k]$. Alors que dans le cas du MRW (en bas) les deux figures sont symétriques, ce n'est plus vérifié pour le SMRW.

qui exigent en particulier pour être vérifiées lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ que β soit inférieur à $1/2$. Sous ces conditions la somme $\sum_{k < i} (i - k)^{-2\alpha} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-2\alpha}$ converge and nous pouvons remplacer, au premier ordre en K_0 , le terme exponentiel par 1. Nous obtenons finalement la même loi d'échelle

$$E[X_t^2] = \sigma^2 t,$$

que pour le mouvement brownien ou le MRW.

3.3.2 Troisième moment

Contrairement au MRW, le troisième moment, qui mesure l'asymétrie du processus, n'est plus nul et s'écrit

$$\begin{aligned} E[X_t^3] &= \sum_{0 \leq i, j, k < n} E[\epsilon(i)\epsilon(j)\epsilon(k)e^{\tilde{\omega}(i)}e^{\tilde{\omega}(j)}e^{\tilde{\omega}(k)}] \\ &= 3 \sum_{0 \leq i < j < n} E[\epsilon(i)\epsilon(j)^2 e^{\tilde{\omega}(i)+2\tilde{\omega}(j)}] \\ &= 3\sigma^2 \Delta t \sum_{0 \leq i < j < n} E[e^{\omega(i)+2\omega(j)}] E[\epsilon(i)e^{2K(i,j)\epsilon(i)}] \\ &\quad E[e^{\sum_{k < i} (K(k,i)+2K(k,j))\epsilon(k)}] E[e^{2\sum_{i < k < j} K(k,j)\epsilon(k)}] \end{aligned}$$

Toujours d'après les conditions (3.1), les termes purement exponentiels (i.e. du type $E[e^{K(k,j)\epsilon_k}]$) peuvent être remplacés, au premier ordre, par 1 à condition que les sommes convergent, ce qui est toujours le cas lorsque $\alpha > 1/2$.

En utilisant la relation $E[\epsilon e^{\lambda \epsilon}] = \lambda \sigma^2 e^{\lambda^2 \sigma^2 / 2}$ vérifiée par les variables gaussiennes centrées, nous trouvons

$$\begin{aligned} E[X_t^3] &\simeq 6(\sigma^2 \Delta t)^2 \sum_{0 \leq i < j < n} K(i, j) \rho_0^{-\frac{\lambda^2}{2}} \rho_{i,j}^{2\lambda^2} \\ &= -6K_0 \sigma^4 T^{\frac{3\lambda^2}{2}} \Delta t^{\alpha-\beta+\frac{\lambda^2}{2}} \sum_{0 \leq i < j < n} \frac{\Delta t}{((j-i)\Delta t)^\alpha} \frac{\Delta t}{((j-i+1)\Delta t)^{2\lambda^2}} \\ &\stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{\simeq} -6K_0 \sigma^4 T^{\frac{3\lambda^2}{2}} \Delta t^{\alpha-\beta+\frac{\lambda^2}{2}} \iint_{0 < u < v < t} \frac{dudv}{|u-v|^{\alpha+2\lambda^2}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Un calcul élémentaire montre que sous la condition $\nu_2 = \alpha + 2\lambda^2 < 1$

$$\iint_{0 < u < v < t} \frac{dudv}{|u-v|^{\alpha+2\lambda^2}} = \frac{t^{2-\nu_2}}{(2-\nu_2)(1-\nu_2)},$$

si bien que notre résultat final devient

$$E[X_t^3] \approx -\frac{6K_0 \sigma^4 T^{\frac{3\lambda^2}{2}}}{(2-\nu_2)(1-\nu_2)} \Delta t^\mu t^{2-\nu_2}, \quad (3.3)$$

avec $\mu = \alpha - \beta + \lambda^2/2$.

Le troisième moment se comporte donc en fonction du temps t comme une loi puissance d'exposant $\zeta_3 = 2 - \nu_2$. Par ailleurs, les conditions (3.1) impliquent que μ demeure toujours supérieur à $\lambda^2/2$ et donc $E[X_t^3]$ s'annule à la limite $\Delta t \rightarrow 0$. En d'autres termes, l'asymétrie du processus obtenu à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ disparaît. En pratique, l'échelle élémentaire à laquelle le processus peut être observé n'est jamais nulle : en finance par exemple, elle est d'au moins quelques secondes pour les marchés futurs et jusqu'à quelques minutes pour les actions. De plus λ^2 est souvent petit pour les applications et la vitesse de convergence est donc faible. Néanmoins, c'est indéniablement une limite de cette construction et d'un point de vue théorique il serait satisfaisant de construire un processus multifractal qui conserve son asymétrie à la limite continue. Nous reviendrons sur ce point dans une section ultérieure.

3.3.3 Moments d'ordre supérieur

Lorsque q augmente, le calcul explicite du moment d'ordre q devient vite inextricable. Toutefois, comme nous le montrons dans l'appendice, il est toujours possible de calculer le terme dominant à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ qui gouverne la loi d'échelle.

Moments impairs Pour $q = 2p + 1$, le moment (non absolu) à évaluer s'écrit

$$E[X_t^{2p+1}] = \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_{2p+1} < n} E[\epsilon[i_1] \dots \epsilon[i_{2p+1}] e^{\tilde{\omega}[i_1]} \dots e^{\tilde{\omega}[i_{2p+1}]}] \quad (3.4)$$

La somme sur les $2p + 1$ variables ne peut pas comme dans le cas symétrique se simplifier grâce au théorème de Wick et contient donc plusieurs termes. Nous justifions dans l'appendice que le terme dominant est

$$\mathcal{D}_{2p+1} = \sum_{0 \leq j_1, \dots, j_{p+1} < n} E[\epsilon[j_1] \epsilon[j_2]^2 \dots \epsilon[j_{p+1}]^2 e^{\tilde{\omega}[j_1] + 2\tilde{\omega}[j_2] + \dots + 2\tilde{\omega}[j_{p+1}]}] \quad (3.5)$$

où les variables sont toutes appariées à l'exception d'une. Au premier ordre en K_0 nous trouvons alors

$$E[X_t^{2p+1}] \simeq -\mathcal{M}_{2p+1} K_0 \Delta t^\mu t^{p+1-2p^2\lambda^2-\alpha} \quad (3.6)$$

où \mathcal{M}_{2p+1} est un préfacteur positif et μ est défini comme auparavant.

En conclusion, les moments d'ordre impair sont non nuls et présentent une loi d'échelle d'exposant

$$\zeta_q = p + 1 - 2p^2\lambda^2 - \alpha$$

avec $q = 2p + 1$.

Moments pairs

Cette fois ci nous avons à calculer le moment

$$E[X_t^{2p}] = \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_{2p} < n} E[\epsilon[i_1] \dots \epsilon[i_{2p}] e^{\tilde{\omega}[i_1] + \dots + \tilde{\omega}[i_{2p}]}]$$

Par des arguments similaires, détaillés dans l'appendice, il est possible de montrer que le terme dominant est

$$\mathcal{D}_{2p} = \sum_{0 \leq j_1, \dots, j_p < n} E \left[\epsilon[j_1]^2 \dots \epsilon[j_p]^2 e^{2\tilde{\omega}[j_1] + \dots + 2\tilde{\omega}[j_p]} \right]$$

et que nous retrouvons, au premier ordre en K_0 , le résultat "classique" du MRW :

$$E \left[X_t^{2p} \right] \simeq \mathcal{M}_{2p} t^{p-2p(p-1)\lambda^2}$$

En conclusion, la fonction de "leverage" que nous avons introduite n'affecte pas les moments pairs mais confère aux moments impairs un comportement multifractal non trivial avec un exposant d'échelle distinct de celui des moments pairs.

3.3.4 Autres noyaux

Comme nous l'avons noté précédemment, une condition pour que les sommes présentes dans l'exponentielle convergent est $\alpha > 1/2$. Une façon de relâcher ceci est d'ajouter une coupure à grande échelle au noyau en loi puissance $K(i, j)$. Plus précisément, nous proposons

$$K(i, j) = \frac{K_0 e^{-\Gamma(j-i)}}{(j-i)^\alpha \Delta t^\beta} \quad (j > i),$$

où $\Gamma \sim \Delta t/T \ll 1$. Nous considérons maintenant le cas $\alpha < 1/2$, mais en imposant

$$\Gamma^{2\alpha-1} K_0^2 \Delta t^{1-2\beta} \ll 1. \quad (3.7)$$

Ce choix assure que la somme dans l'exponentielle est convergente et reste petite. De la même manière que plus haut, le troisième moment s'écrit

$$E \left[X_t^3 \right] \underset{\Delta t \rightarrow 0}{\simeq} -6K_0 \sigma^4 T^{\frac{3\lambda^2}{2}} \Delta t^\mu \iint_{0 < u < v < t} \frac{e^{-\frac{|u-v|}{T}}}{|u-v|^{\alpha+2\lambda^2}} du dv$$

Notons que la double intégrale sur u, v converge pourvu que $\alpha + 2\lambda^2 < 1$. Sous la condition $t \ll T$, le terme exponentiel peut être oublié et nous retrouvons le même résultat que plus haut avec $\mu = \alpha - \beta + \lambda^2/2$. Malheureusement, la condition (3.7) avec $\Gamma \sim \Delta t/T$ impose que $\alpha - \beta \geq 0$ dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$. L'exposant μ est donc strictement positif et l'asymétrie disparaît une fois de plus en prenant la limite continue. Néanmoins, le fait de choisir $\alpha < 1/2$ conduit à la possibilité intéressante pour la skewness d'augmenter avec le temps. En effet, le troisième moment divisé par le cube de la volatilité se comporte comme $t^{1/2-\nu_2}$, avec $\nu_2 = \alpha + 2\lambda^2$. De faibles valeurs de α conduisent donc à une skewness croissante (au moins pour $t \ll T$). A contrario, le cas $\alpha > 1/2$ correspond nécessairement à une skewness décroissante.

3.3.5 Utilisation d'un bruit fractionnaire

La section précédente a montré qu'il n'était pas possible de conserver une asymétrie à la limite continue en ajustant simplement le noyau $K(i, j)$. Nous montrons en appendice que l'utilisation d'un bruit gaussien H -fractionnaire permet de résoudre ce problème. L'exposant d'échelle trouvé est nouveau et il vaut

$$\begin{aligned}\zeta_H(2p) &= 2Hp - \lambda^2 p(2p - 1) \\ \zeta_H(2p + 1) &= 2H(p + 1) - \alpha - \lambda^2 p(2p + 1)\end{aligned}$$

Il faut remarquer avant tout que cet exposant ne tend pas vers l'exposant normal lorsque $H \rightarrow 1/2$. Le processus obtenu est donc d'une nature très différente. Il présente des incréments corrélés ce qui limite ses applications en finance aux cas de quelques marchés peu liquides et mal arbitrés. La question naturelle qu'on peut alors se poser serait de savoir si un lien profond relie cette asymétrie persistante et ces corrélations.

3.4 Comparaison des prédictions avec les simulations

3.4.1 Méthodologie

Nous avons évalué les moments en moyennant sur un grand nombre de réalisations du processus. Les quantités sur lesquelles nous travaillons peuvent être petites et les vitesses de convergence faibles à cause des corrélations à longue portée des variables $\{\omega[i]\}$ et de la lente décroissance du noyau $K(i, j)$. Pour éviter des effets d'asymétrie parasites et pour être plus précis, nous avons systématiquement moyenné sur les processus générés par les variables $\{\epsilon[i], \omega[i]\}$ et par les variables $\{-\epsilon[i], \omega[i]\}$. En l'absence d'asymétrie, le second serait exactement l'image par un miroir du premier rendant tous les moments impairs strictement nuls. En présence d'asymétrie, le second processus n'est plus l'image du premier (il suffit de regarder la figure 3.1) et nous trouvons alors des moments non nuls. Ainsi, chaque résultat non nul peut être attribué en toute certitude à l'effet du noyau.

3.4.2 Résultats

Les résultats que nous présentons sont basés sur 10000 réalisations indépendantes du processus. 2^{13} variables étaient utilisées pour chaque série. Nos paramètres sont $\Delta t = 2^{-13}$, $T = 4000\Delta t$, $\lambda = 0.175$, ce qui correspond à $\lambda^2 \simeq 0.03$. Nous avons choisi deux valeurs différentes pour les exposants du noyau : $\alpha = 0.3$ avec $\beta = \alpha + \lambda^2/2$ et $\alpha = 0.6$ avec $\beta = 0.45$. L'amplitude de l'effet leverage est fixée à $K_0 = 0.1$, ce qui est suffisamment faible pour que nos approximations soient justes.

Ces valeurs ont été choisies assez arbitrairement mais les résultats obtenus sont assez typiques de ceux observés sur les marchés. Si nous voulions être plus précis, une phase de calibration du modèle serait nécessaire. Pour les grandeurs σ , λ et T nous pouvons suivre la même procédure que dans le cas symétrique. Pour les nouveaux paramètres, α , K_0 et β^1 , il est possible de les

¹Notons que ces deux dernières grandeurs ne sont pas réellement indépendantes puisqu'elles interviennent dans le modèle à travers $K_0/\Delta t^\beta$.

calibrer grâce à une fonction asymétrique des cours comme la skewness ou la fonction de leverage. Cette étape, indispensable pour une mise en oeuvre appliquée du modèle, n'a pas été plus approfondie et demeure, comme dans le cas symétrique, un sujet à étudier plus précisément.

Nous avons évalué les différents moments pour des temps qui varient de $t = 10\Delta t$ à $t = 1300\Delta t$, c'est à dire dans une région où $\Delta t \ll t \ll T$. Nous avons ensuite tracé le logarithme des différents moments contre le logarithme du temps. Si la multifractalité est vérifiée, on doit obtenir une droite de pente $\zeta(q)$ pour chaque moment.

Nous observons en effet une belle loi d'échelle pour les second et quatrième moments du processus (figure 3.2) avec une adéquation parfaite entre la théorie et les simulations. L'accord est également très bon pour le troisième moment (figure 3.3), en particulier pour $\alpha = 0.3$. Pour $\alpha = 0.6$, on observe une différence systématique qui tend à disparaître aux grandes échelles. Nous pensons que cela peut s'expliquer par les corrections à notre calcul asymptotique, qui sont plus fortes lorsque α augmente. En effet dans les calculs précédents, nous utilisons

$$\sum_{0 \leq i < j < n} \frac{\Delta t}{((j-i)\Delta t)^\alpha} \frac{\Delta t}{((j-i+1)\Delta t)^{2\lambda^2}} \approx \iint_{0 < u < v < t} \frac{du dv}{|u-v|^{\alpha+2\lambda^2}}$$

Bien que ceci soit parfaitement correct dans la limite $\Delta t/t \rightarrow 0$, il y a des corrections d'ordre $(\Delta t/t)^{1-\nu_2}$ qui persistent lorsque $\nu_2 \rightarrow 1$. Ces corrections à temps fini sont beaucoup plus faibles pour les moments pairs puisque dans ce cas ν_2 est remplacé par $4\lambda^2$ qui est très faible avec nos choix de paramètres (voir figure 3.4).

3.5 Effet HARCH

Le processus SMRW que nous avons présenté a été conçu pour reproduire une asymétrie observée dans les cours financiers, l'effet leverage. Toutefois, d'autres asymétries existent dans les cours financiers, comme l'effet HARCH mis en évidence dans [AMS98, ZL01]. Selon ces auteurs, la volatilité à grande échelle influence causalement (c'est à dire dans le futur) la volatilité à plus petite échelle, alors que l'effet inverse (des petites échelles vers les grandes) est nettement plus faible, sans être nul toutefois.

Notre modèle, grâce aux corrélations entre rendements passés et volatilité future, reproduit également cet effet. Une façon de quantifier celui-ci est de calculer la corrélation entre des volatilités à différentes échelles qui doit se comporter comme

$$\begin{aligned} C(n, m) &= E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \delta X[i] \right)^2 \left(\sum_{j=n}^{n+m} \delta X[j] \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n}^{n+m} E [\delta X[i]^2 \delta X[j]^2] + 2 \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < n} \sum_{j=n}^{n+m} E [\delta X[i_1] \delta X[i_2] \delta X[j]^2]. \end{aligned}$$

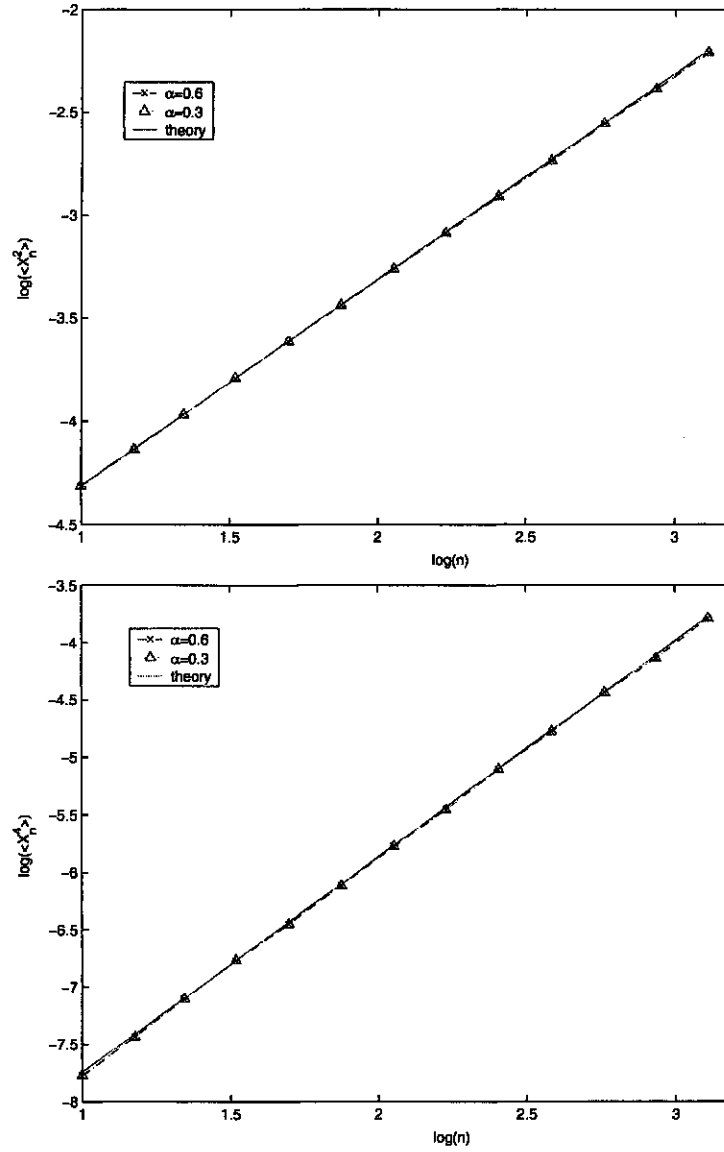


FIG. 3.2: Logarithme (décimal) des second (en haut) et quatrième (en bas) moments du processus, avec $\alpha = 0.6$ (\times) et $\alpha = 0.3$ (Δ), en fonction du logarithme du temps. Nous avons également tracé la prédiction théorique, indépendante de α . L'accord est excellent sur toute la région, tant pour l'exposant ζ_q que pour le préfacteur.

Pour le SMRW, le premier terme C_1 s'écrit plus précisément

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n}^{n+m} E \left[\epsilon[i]^2 \epsilon[j]^2 e^{2\tilde{\omega}[i] + 2\tilde{\omega}[j]} \right] \\
 &= \sigma^2 \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n}^{n+m} E \left[\epsilon[i]^2 e^{2K(i,j)\epsilon[i]} \right] E \left[e^{2 \sum_{k<i} (K(i,k) + K(j,k))\epsilon[k]} \right] \\
 &\quad E \left[e^{2 \sum_{i<k<j} K(j,k)\epsilon[k]} \right] E \left[e^{2\omega[i] + 2\omega[j]} \right]
 \end{aligned}$$

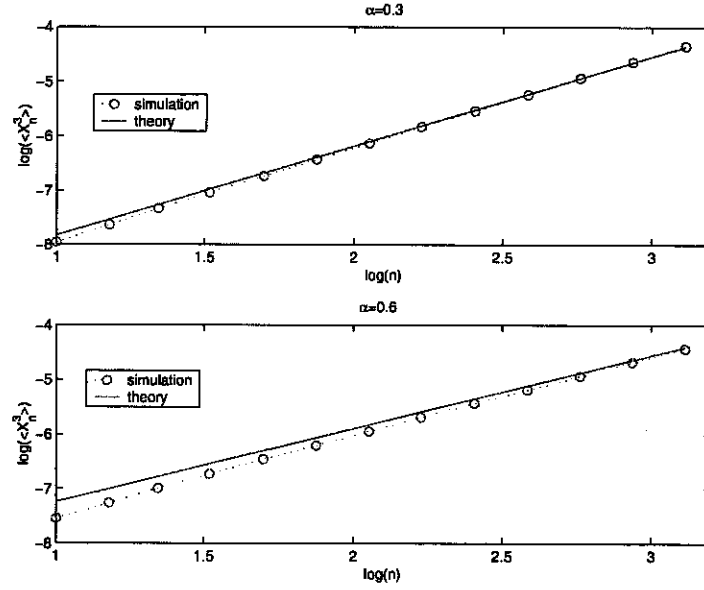


FIG. 3.3: Logarithme (décimal) du troisième moment du processus, pour $\alpha = 0.3$ (en haut) et $\alpha = 0.6$ (en bas). L'adéquation entre simulation et théorie est encore très bonne pour $\alpha = 0.3$ mais un peu moins pour $\alpha = 0.6$. Cette différence peut s'expliquer par la convergence plus rapide des sommes de Riemann vers l'intégrale dans le cas $\alpha = 0.3$ que dans le cas $\alpha = 0.6$ (voir figure 3.4).

Grâce aux hypothèses 3.1, cette quantité vaut, au premier ordre,

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sigma^4 \Delta t^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n}^{n+m} E[e^{2\omega_i + 2\omega_j}] \\
 &= \sigma^4 T^{4\lambda^2} \int_{u=0}^{\tau} \int_{v=\tau}^{\tau+\tau'} \frac{du dv}{|u-v|^{4\lambda^2}} \\
 &= \frac{\sigma^4 T^{4\lambda^2}}{(1-4\lambda^2)(2-4\lambda^2)} [(\tau+\tau')^{2-4\lambda^2} - \tau^{2-4\lambda^2} - \tau'^{2-4\lambda^2}]
 \end{aligned}$$

avec $\tau = n\Delta t$ et $\tau' = m\Delta t$.

Ce résultat est symétrique en τ et τ' , et par conséquent ne peut pas expliquer notre effet. Le

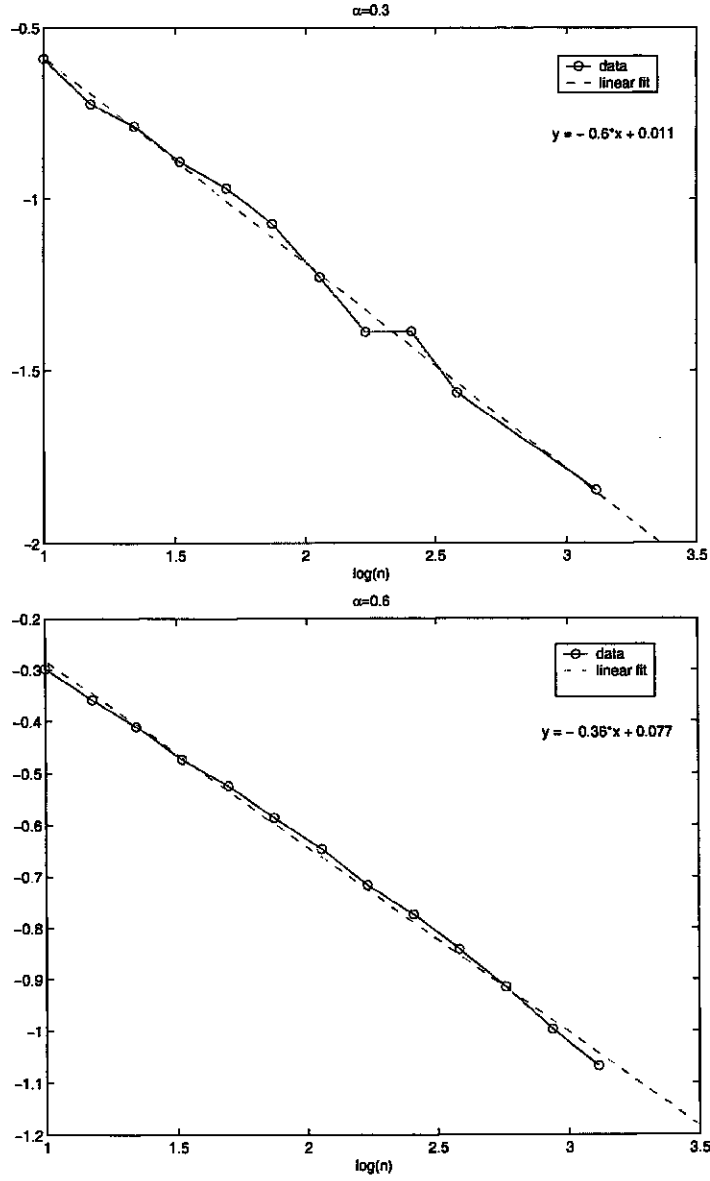


FIG. 3.4: Logarithme (décimal) de la différence renormalisée entre le troisième moment mesuré et théorique ($\langle X_{th}^3 \rangle - \langle X_{meas}^3 \rangle / \langle X_{th}^3 \rangle$) en fonction du logarithme du temps ($n = t/\Delta t$). Ce graphique confirme que cette différence se comporte en fonction du temps comme une loi puissance, avec un exposant proche de $1 - \nu_2$, qui dépend de α . Ces corrections deviennent importantes lorsque $\nu_2 \rightarrow 1$ (par exemple lorsque $\alpha = 0.6$) et peuvent expliquer la différence observée sur le figure 3.3.

second terme est lui égal à :

$$\begin{aligned}
 C_2 &= 2 \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < n} \sum_{j=n}^{n+m} E \left[\epsilon[i_1] \epsilon[i_2] \epsilon[j]^2 e^{\omega[i_1] + \omega[i_2] + 2\omega[j]} \right] \\
 &= 2\sigma^2 \Delta t \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < n} \sum_{j=n}^{n+m} E \left[\epsilon[i_1] e^{(2K(i_1, j) + K(i_1, i_2))\epsilon[i_1]} \right] \cdot E \left[\epsilon[i_2] e^{2K(i_2, j)\epsilon[i_2]} \right] \cdot \\
 &\quad E \left[e^{\sum_{k < i_1} ((K(k, i_1) + K(k, i_2) + 2K(k, j))\epsilon[k])} \right] \cdot E \left[e^{\sum_{i_1 < k < i_2} ((K(k, i_2) + 2K(k, j))\epsilon[k])} \right] \cdot \\
 &\quad E \left[e^{\sum_{i_2 < k < j} (2K(k, j)\epsilon[k])} \right] \cdot E \left[e^{\omega[i_1] + \omega[i_2] + 2\omega[j]} \right]
 \end{aligned}$$

Les précédentes approximations permettent d'écrire, toujours au premier ordre,

$$\begin{aligned}
 C_2 &= 2(\sigma^2 \Delta t)^3 \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < n} \sum_{j=n}^{n+m} 2K(i_2, j) \cdot (2K(i_1, j) + K(i_1, i_2)) \cdot \\
 &\quad E \left[e^{\omega[i_1] + \omega[i_2] + 2\omega[j]} \right] \\
 &= 2\sigma^6 K_0^2 T^4 \lambda^2 \Delta t^{\lambda^2 + 2\alpha - 2\beta} \int_{0 \leq u_1 < u_2 < \tau \leq v < \tau + \tau'} \frac{2}{(v - u_2)^\alpha} \cdot \\
 &\quad \left[\frac{1}{(u_2 - u_1)^\alpha} + \frac{2}{(v - u_1)^\alpha} \right] \cdot \frac{du_1 du_2 dv}{(u_2 - u_1)^{\lambda^2} (v - u_1)^{2\lambda^2} (v - u_2)^{2\lambda^2}}
 \end{aligned}$$

Le calcul exact de l'intégrale nous importe peu, ce qui nous intéresse est son comportement en fonction du régime étudié. Pour cela, nous effectuons un changement de variables et posons :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= x_1 \tau \\
 u_2 &= x_2 \tau \\
 v &= \tau + y \tau'
 \end{aligned}$$

Considérons tout d'abord le cas $\tau' = \epsilon \tau$ avec $\epsilon \ll 1$ et $\tau \sim 1$, c'est à dire que nous comparons les volatilités futures à petites échelles avec les volatilités passées à grandes échelles. Il est facile de voir que le facteur précédent se comporte comme

$$C_2 \propto K_0^2 \epsilon \tau^{3-2\alpha-5\lambda^2}$$

Le cas opposé, lorsque $\tau = \epsilon \tau'$ avec $\epsilon \ll 1$ et $\tau' \sim 1$, correspond à une comparaison entre volatilités futures à grandes échelles et volatilités passées à petites échelles. On a alors :

$$C_2 \propto K_0^2 \epsilon^{2-\alpha-\lambda^2} \tau'^{3-2\alpha-5\lambda^2}$$

Le rapport du second indicateur sur le premier vaut donc

$$\epsilon^{1-\alpha-\lambda^2}$$

qui tend vers zéro lorsque la condition $\alpha + \lambda^2 < 1$ est vérifiée, ce qui est le cas en pratique.

Le processus SMRW présente donc bien le même type d'asymétrie que celle détectée dans les cours financiers : la corrélation entre la volatilité passée à petite échelle et volatilité future à grande échelle est plus faible que la corrélation entre volatilité passée à grande échelle et volatilité future à petite échelle.

3.6 Application à la valorisation d'options

3.6.1 Effet de smile

Il est bien connu que les hypothèses sous-jacentes au modèle de valorisation de Black-Scholes ne sont pas satisfaites en pratique. En particulier, les rendements financiers ont une distribution leptokurtique et de fortes corrélations non linéaires qui sont absentes du monde

de Black-Scholes. Ceci a des répercussions importantes sur la valorisation et la couverture des options, et tout particulièrement en ce qui concerne les options *exotiques* : options asiatiques, barrière, etc. Le symptôme le plus évident de cette imperfection de la modélisation est le bien connu *smile* de volatilité. Contrairement aux hypothèses du modèle de Black Scholes, qui postule que le volatilité ne varie pas avec le prix d'exercice ou la maturité de l'option, les volatilités implicites, tirées des prix d'option, dépendent fortement de ces deux facteurs, définissant ainsi une surface de volatilité. En effet, les traders savent parfaitement que les hypothèses de Black-Scholes ne sont pas vérifiées et qu'en conséquence ses prédictions sont partiellement erronées. Chacun incorpore ces erreurs en cotant certaines options à un prix différent de celui de Black-Scholes d'où une variation de la volatilité implicite. Bien que cet effet soit bien connu et largement étudié par praticiens et académiques, lui trouver une modélisation satisfaisante reste un des axes de recherche majeur de la finance quantitative moderne [Jar98].

Dans la recherche d'un tel modèle, plusieurs auteurs [JR82, BFLW, CS97] ont proposé des formules approchées simples, sous forme de corrections à la formule de Black-Scholes, pour le prix d'une option lorsque l'actif sous jacent est dirigé par un processus stochastique arbitraire. L'étude de ces formules permet de mieux comprendre certains des mécanismes qui conduisent génériquement à des figures de smile non triviales.

Le point de départ est de considérer que le processus sous jacent est "raisonnablement" non-gaussien et qu'il est possible de capturer sa dynamique en utilisant un développement en cumulants tronqué [Fel71]. L'utilisation de ce développement, tronqué au deuxième ordre, pour la valorisation d'une option conduit à une formule corrigée où interviennent les trois premiers cumulants. En inversant cette formule, il est alors possible de trouver une formule explicite du smile de volatilité en fonction de ces paramètres. Plus précisément, pour une option de maturité t et si les (log)-rendements entre 0 et t ont une variance σ_t , une skewness $\kappa_{3,t}$ et une kurtosis $\kappa_{4,t}$, la volatilité implicite v_t est approximativement donnée par la formule [BFLW]² :

$$v_t = \sigma_t \left[1 + \frac{\kappa_{3,t}}{3!} (2\sigma_t - d_t) - \frac{\kappa_{4,t}}{4!} (1 - d_t^2 + 3d_t\sigma_t - 3\sigma_t^2) \right] \quad (3.8)$$

$$d_t = \frac{\log(S_0/K) + rt + \sigma_t^2/2}{\sigma_t}$$

où S_0 est le niveau actuel du sous jacent, σ_0 la (vraie) volatilité, K le prix d'exercice de l'option et r le taux d'intérêt.

Remarquons que pour un processus symétrique ($\kappa_{3,t} = 0$) et une option à la monnaie ($d_t = \sigma_t/2$), la formule devient

$$v_t = \sigma_0 \left[1 - \frac{\kappa_{4,t}}{4!} \left(1 - \frac{7\sigma_t^2}{4} \right) \right]$$

Pour des valeurs typiques de marché, $1 - \frac{7\sigma_t^2}{4} > 0$ et donc $v_t < \sigma_0$. Contrairement à ce qu'on pourrait penser intuitivement, l'existence d'une kurtosis non nulle (ce qui signifie une loi sous jacente plus large) abaisse le prix à la monnaie de l'option. En revanche, en dehors de la

²La formule donnée dans [BFLW] diffère légèrement de celle que nous donnons car les auteurs de [BFLW] négligent des termes en σ_t par rapport à la moneyness d_t . Toutefois, cette approximation ne semble pas légitime et nous les avons donc conservés.

monnaie cette kurtosis non nulle enchérit l'option.

D'autres formules ont été proposées dans la littérature. Ainsi, pour un modèle additif, [PCB98] trouve la formule

$$v_t = \sigma_0 \left[1 - \frac{\kappa_{3,t}}{3!} d_t - \frac{\kappa_{4,t}}{4!} (1 - d_t^2) \right] \quad (3.9)$$

$$d_t = \frac{S_0 - K}{S_0 \sigma_t},$$

En fait la formule 3.8 se réduit à 3.9 lorsqu'on considère les limites $\sigma_t, rt \ll 1$ and $S_0 - K \ll S_0$. D'autres travaux ont également recherché des formules analytiques approchées pour le smile de volatilité. Citons en particulier ceux de Fouque, Papanicolaou et Sircar [FPS00], qui considèrent pour l'actif un modèle de diffusion avec une volatilité stochastique

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{X_t} &= \mu dt + f(Y_t) dW_t \\ dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\tilde{Z}_t \\ \tilde{Z}_t &= \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t \end{aligned}$$

f est une fonction déterministe, typiquement une exponentielle, et ρ est le coefficient de corrélation entre les deux browniens. Le paramètre α , le plus important de leur modèle, gouverne la force du retour à la moyenne de la volatilité (plus α est important plus le processus revient vite vers sa valeur moyenne m). L'hypothèse principale est que α est très grand, mais non infini (qui correspondrait à une volatilité constante). Il est alors légitime de chercher les solutions aux différents problèmes sous forme perturbative suivant les puissances de $\epsilon = 1/\sqrt{\alpha}$. Cette hypothèse est l'analogue de l'hypothèse de "faible non-gaussianité" utilisée dans le développement en cumulants. La résolution, par des méthodes d'EDP, du problème au premier ordre conduit à une formule de smile

$$v_t = A \left(\frac{\log(K/x)}{T-t} \right) / \sqrt{\alpha} + B / \sqrt{\alpha} + \mathcal{O}(\alpha^{-1})$$

où A et B sont des paramètres dépendant du détail du modèle (essentiellement le choix de la fonction f). Leur solution permet de reproduire l'asymétrie observée, en revanche elle est monotone (décroissante) en x et est donc incapable de traduire la courbure du smile. La prise en compte du second ordre pourrait sans doute permettre de reproduire cet effet, mais les calculs sont alors plus compliqués.

3.6.2 Valorisation d'options avec le SMRW

Le processus SMRW présentant à la fois une skewness et une kurtosis anormales, son utilisation pour la valorisation d'options devrait conduire à un smile de volatilité. Par ailleurs la formule 3.8 précédente donne une prédiction sur la forme du smile à observer. Il est donc tentant de vérifier si

1. nous obtenons effectivement un smile de volatilité
2. celui-ci correspond à sa prédiction 3.8

Méthodologie Nous modélisons donc les rendements par un SMRW géométrique

$$\frac{\delta S_t}{S_t} = \mu \delta t + \sigma_0 \delta X_t \quad (3.10)$$

où X_t est un processus SMRW. Nous évaluons ensuite le prix d'une option européenne par une méthode de Monte Carlo. Le prix est donné par la moyenne du payoff final $(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$ pour un grand nombre de réalisations de notre processus avec $\mu = r$.

Ce choix de la méthode de valorisation fait implicitement plusieurs hypothèses que nous voulons détailler un peu plus

- moyenner avec $\mu = r$ revient en quelque sorte à supposer que la dynamique que nous nous donnons est celle sous une "probabilité risque-neutre". En particulier cela suppose que l'option peut être parfaitement couverte par une stratégie dynamique en Δ . Nous savons bien que pour un processus arbitraire comme notre SMRW, cette hypothèse a toutes les chances de ne pas être vérifiée. Pour être plus précis, il conviendrait d'utiliser d'autres schémas de couverture (voir le chapitre suivant à ce propos). Toutefois, notre but ici n'est pas aussi ambitieux. Nous voulons avant tout tester nos résultats au regard de la prédiction 3.8 et dans le cadre de celle ci.
- par ailleurs nous ne cherchons pas à mesurer la volatilité instantanée et à conditionner les chemins utilisés à partir de cette valeur. En d'autres termes, nous étudions une surface de volatilité inconditionnelle, indépendante du temps et qui conduirait à des couvertures ne dépendant pas du niveau de volatilité.

Paramètres Nous nous intéressons à des options de différentes maturités : $t=0.25, 0.5, 0.75$ et 1 an. Le cours initial de l'action vaut 100. La volatilité annuelle est fixée à 20% et le taux d'intérêt à 4%. Les paramètres du SMRW sont $\lambda = 0.175$, $T = 2$ ans, $K_0 = 0.1$ et $\alpha = 0.3$ ou 0.6. Le pas de discrétisation choisi pour la simulation est $\Delta t = 2^{-8}$. Rappelons que pour un tel processus, la skewness $\kappa_{3,t}^{the}$ et la kurtosis $\kappa_{4,t}^{the}$ théoriques sont données par

$$\kappa_{3,t}^{the} = -\frac{6K_0\sigma T^{\frac{3\lambda}{2}} t^{\frac{1}{2}-\nu_2}}{(2-\nu_2)(1-\nu_2)} \Delta t^\mu \quad (3.11)$$

$$\kappa_{4,t}^{the} = \frac{6T^{4\lambda^2} t^{-4\lambda^2}}{(2-4\lambda^2)(1-4\lambda^2)} - 3. \quad (3.12)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, la skewness augmente avec le temps lorsque $\alpha < 1/2$.³ Ceci peut être d'un grand intérêt en finance car on observe souvent que l'asymétrie du smile de volatilité persiste même pour de longues maturités.

Résultats Nous avons tracé sur la figure 3.5 la volatilité implicite obtenue pour les différentes maturités par notre simulation Monte-Carlo (avec ses barres d'erreur). Nous y avons superposé le tracé de la volatilité implicite théorique donnée par la formule 3.8 avec les valeurs 3.11 et 3.12.

³dans la limite du régime $t < T$. Lorsque $t > T$, le comportement multifractal cesse d'exister. Skewness et kurtosis décroissent alors vers 0.

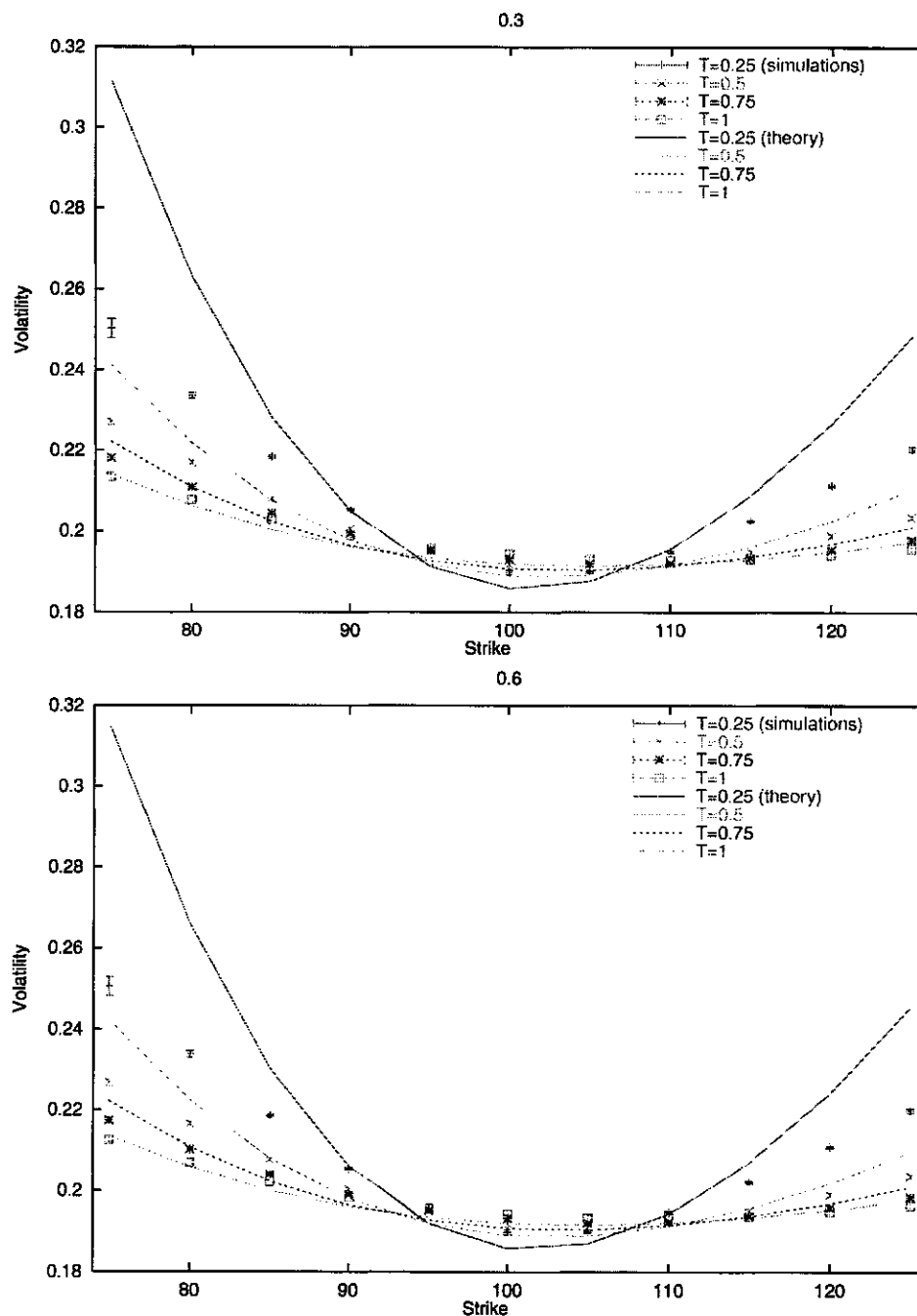


FIG. 3.5: Volatilité implicite v_t en fonction du strike K , pour différentes maturités ($t=0.25, 0.5, 0.75$ et 1 an), pour $\alpha = 0.3$ (en haut) et $\alpha = 0.6$ (en bas). Nous avons choisi $r = 4\%$, $\sigma_1 = 20\%$, $\lambda = 0.175$ et $T \simeq 2$ ans (ces valeurs sont celles données dans [MDB00]); le pas de discrétisation est ici $\Delta t = 2^{-8}$. Sur les deux graphiques nous voyons clairement l'effet de smile.

Discussion Il apparaît clairement que la nature non gaussienne de notre processus induit une figure de smile asymétrique. L'accord avec la forme théorique est satisfaisant pour les maturités 0.75 et 1 an. Il devient nettement moins bon lorsque la maturité diminue.

Pour être plus précis nous pouvons effectuer une régression paramétrique des smiles empiriques selon l'équation 3.8 pour obtenir des valeurs que nous qualifierons d'implicites pour la skewness (soit κ_3^{imp}) et la kurtosis (soit κ_4^{imp}). Nous avons choisi de régresser sur tout l'intervalle [75 : 125] de strikes, même si on peut évidemment discuter de ce choix. En effet les volatilités implicites pour les options très dans la monnaie (c'est à dire pour de faibles prix d'exercice) sont très sensibles aux erreurs et par conséquent ne sont peut être pas suffisamment fiables. Pour être tout à fait complet, nous avons également calculé à partir de nos simulations la skewness et la kurtosis empiriques (notées respectivement κ_3^{num} et κ_4^{num}). Nous reportons ces résultats dans les tables 3.1 et 3.2.

	Maturité			
	0.25	0.5	0.75	1
κ_3^{imp}	-0.08	-0.13	-0.15	-0.16
κ_3^{the}	-0.0975	-0.107	-0.114	-0.118
κ_3^{num}	-0.09	-0.11	-0.11	-0.11
κ_4^{imp}	0.79	0.80	0.75	0.69
κ_4^{the}	1.685	1.303	1.095	0.953
κ_4^{num}	1.60	1.27	1.11	0.97

TAB. 3.1: Comparaison entre valeurs implicites, théoriques et numériques des cumulants pour différentes maturités et avec $\alpha = 0.3$. Les valeurs théoriques sont calculées en utilisant les formules (3.11,3.12). Les valeurs implicites sont obtenues par une régression des volatilités obtenues par simulations Monte-Carlo selon l'équation (3.8), en utilisant tous les strikes.

	Maturity			
	0.25	0.5	0.75	1
κ_3^{imp}	-0.08	-0.12	-0.14	-0.14
κ_3^{the}	-0.136	-0.122	-0.114	-0.109
κ_3^{num}	-0.10	-0.11	-0.10	-0.09
κ_4^{imp}	0.78	0.80	0.76	0.69
κ_4^{the}	1.685	1.303	1.095	0.953
κ_4^{num}	1.60	1.27	1.10	0.96

TAB. 3.2: Idem que la table 3.1 mais avec $\alpha = 0.6$.

L'accord entre les valeurs théoriques et implicites apparaît n'être que qualitativement correct, même pour les plus grandes maturités où sur la figure 3.5 l'accord semblait très satisfaisant. La kurtosis implicite est systématiquement inférieure à la kurtosis théorique,

avec un accord légèrement meilleur pour les maturités plus élevées. La skewness implicite elle semble s'éloigner de la valeur théorique lorsque la maturité augmente. Notons une fois de plus que cette valeur augmente avec le temps, contrairement aux modèles standard qui prédisent une décroissance en $1/\sqrt{t}$. La raison de ces déviations n'est sans doute pas due à un problème de simulations puisque les valeurs empiriques de la skewness et de la kurtosis, calculées sur les différents tirages Monte Carlo, montrent un bon accord avec les valeurs théoriques.

L'explication est donc à chercher ailleurs. Pour déterminer l'origine de ces différences, nous avons testé directement notre hypothèse de départ, à savoir la validité du développement en cumulants. Sur la figure 3.6, nous avons tracé la différence entre la fonction de répartition gaussienne et la fonction de répartition empirique de notre processus, pour les maturités $t = 0.25$ et $t = 1$. En guise de comparaison, nous avons également tracé la différence donnée par le développement en cumulants avec les paramètres théoriques (i.e. κ_3^{the} et κ_4^{the}) et avec les grandeurs implicites (i.e. κ_3^{imp} et κ_4^{imp}).

Nous constatons que le développement en cumulants tronqué au second ordre n'est lui même qu'approximativement correct. En effet, nous observons des déviations systématiques entre le tracé empirique et les courbes empiriques. Ceci est particulièrement vrai lorsque l'on utilise les cumulants théoriques exacts, ce qui suggère que les cumulants d'ordre supérieur ne peuvent pas être négligés. En fait, une telle observation confirme nos résultats précédents. Nous avons en effet montré dans les parties précédentes que les cumulants du SMRW ne décroissent que très lentement avec le temps : par exemple $\kappa_{2p,t} \sim t^{-2p(p-1)\lambda^2}$ alors que pour des accroissements indépendants la décroissance se fait comme $t^{-p/2}$. Ainsi, avec nos paramètres, $\kappa_{6,t}/\kappa_{4,t} \sim t^{-8\lambda^2} \sim t^{-0.25}$.

Nous voyons également sur la figure 3.6 que les différences sont moindres en utilisant les valeurs implicites extraites de la figure de smile. En fait, ces valeurs, tirées d'une régression, corrigent implicitement l'inadéquation de l'expansion en cumulants tronqués (tout comme le smile de volatilité corrige l'inadéquation du modèle de Black-Scholes face à la réalité).

En conclusion, l'utilisation d'une expansion en cumulants permet de tenir compte du caractère non gaussien du processus de prix et améliorer significativement, et à moindre coût, les prédictions du modèle de Black Scholes. Toutefois, ce progrès dans la modélisation ne permet pas de capturer l'effet des corrélations et la persistance qui en résulte. En conséquence, il reste imparfait et il nous faut recourir à des méthodes plus traditionnelles et plus coûteuses en temps de calcul (comme les simulations Monte Carlo) pour obtenir des résultats plus fiables.

Enfin, pour convaincre de la capacité de notre modèle à capturer différentes figures de smile, nous illustrons l'effet du paramètre K_0 sur la figure 3.7. Nous y avons tracé trois smiles, obtenus avec différentes valeurs de K_0 , 0.1, 0.5 et 1, qui conduisent à une asymétrie de plus en plus prononcée. Nous pensons donc qu'il est possible, en jouant avec les paramètres α , K_0 et λ^2 , de reproduire fidèlement la courbure et l'asymétrie d'une vaste classe de smiles observés dans le marché.

3.7 Conclusions et perspectives

La généralisation du processus MRW que nous avons présentée nous a permis de prendre en compte le caractère asymétrique des cours financiers. Introduite dans le processus par l'intermédiaire d'un noyau K qui relie rendements passés et volatilité future ("leverage effect")

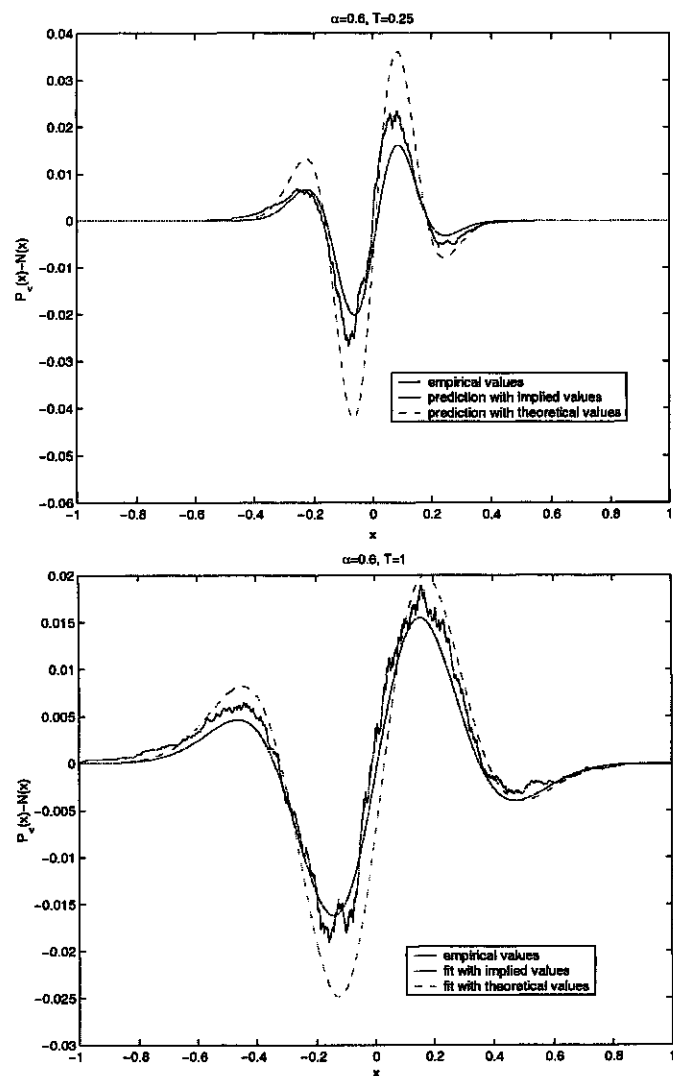


FIG. 3.6: Différence entre la fonction de distribution cumulée du SMRW ($\alpha = 0.6$) et la distribution normale, pour les maturités 0.25 (en haut) et 1 (en bas). Nous la comparons avec le développement en cumulants, évalué avec les valeurs implicites des cumulants obtenues par régression du smile de volatilité et avec les valeurs théoriques des cumulants (3.11, 3.12).

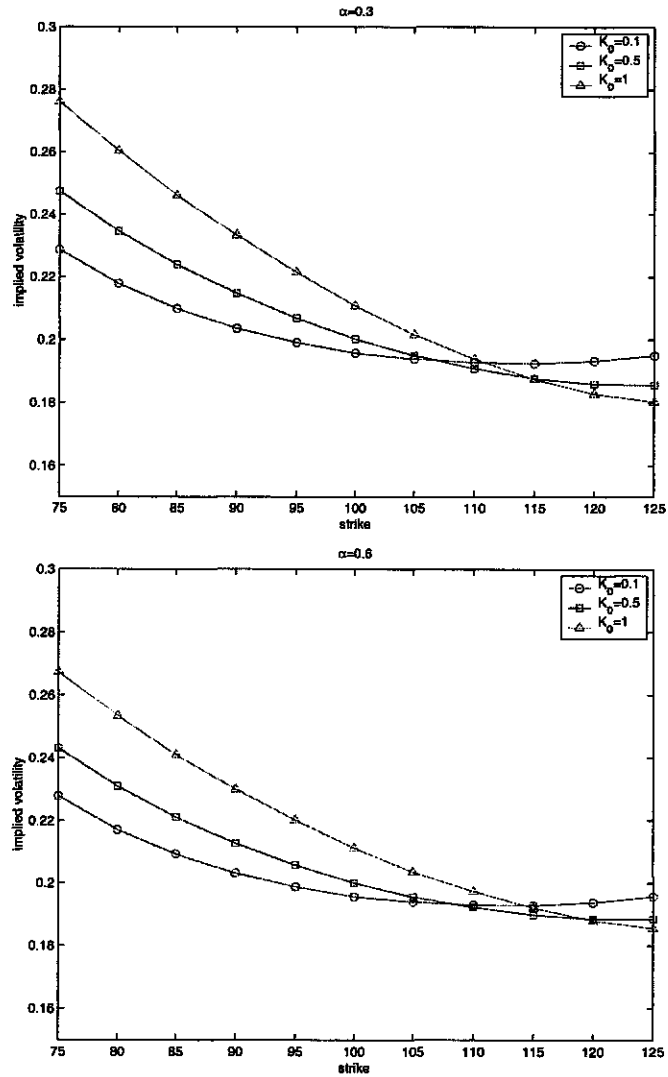


FIG. 3.7: Volatilité implicite v_t en fonction du strike, pour différentes valeurs du paramètre K_0 , avec $\alpha = 0.3$ (en haut) et $\alpha = 0.6$ (en bas). Nous avons choisi $r = 4\%$, $\sigma_1 = 20\%$, $\lambda = 0.175$. Dans les deux cas nous voyons clairement l'influence croissante de K_0 sur la forme asymétrique du smile.

l'asymétrie ne brise pas le caractère multifractal du MRW. Le SMRW possède en effet les mêmes lois d'échelle que le MRW pour les moments pairs mais, par rapport au MRW, il présente en plus des lois d'échelle pour les moments impairs, avec un exposant que nous avons pu calculer. L'introduction de l'asymétrie lui permet également de reproduire l'effet "HARCH" documenté dans [ZL01, AMS98]. Ce processus est donc d'un grand intérêt en finance puisqu'il reproduit fidèlement la majeure partie des faits stylisés : décorrélation des rendements mais dépendance non linéaire à longue portée, distribution non gaussienne aux petites échelles et asymétrie, très largement modulable dans notre modèle. Les applications sont donc nombreuses : gestion des risques, valorisation d'options, etc.

Nous avons illustré ce dernier point en calculant par une méthode de Monte Carlo le prix d'une option (européenne) avec notre modèle. Le caractère non gaussien du SMRW entraîne l'existence d'un smile de volatilité que nous pouvons faire varier en jouant sur les paramètres du processus. En comparant la figure obtenue avec celle prédite par un développement en cumulant de la distribution de probabilité, nous apportons un exemple de plus des propriétés engendrées par le caractère multifractal de notre processus, avec une décroissance très lente des cumulants avec le temps.

Beaucoup de questions restent ouvertes à propos de ce processus, en particulier autour de son comportement lorsque le pas de discrétisation tend vers 0. En effet, dans notre construction l'asymétrie disparaît à la limite continue du processus. Un moyen un peu artificiel de la conserver est d'utiliser un bruit gaussien fractionnaire à la place du bruit blanc. Il serait intéressant de savoir dans quelle mesure cette observation est générale, si d'autres constructions sont possibles ne souffrant pas de cette limitation. On pourrait en particulier tenter d'étendre notre approche à d'autres constructions, plus récentes, de processus multifractals symétriques telles que [MB02, Sch03b].

Chapitre 4

Couverture par minimisation de risque

4.1 Motivations

4.1.1 Rappels sur le modèle de Black-Scholes et les marchés complets

Dans leur célèbre article de 1973 [BS73], Black et Scholes ont jeté les bases des mathématiques financières modernes. Leurs travaux ont depuis été considérablement enrichis et raffinés par de nombreux autres auteurs [HK79, HP81, DS94] pour culminer aujourd'hui en un cadre relativement abstrait profondément relié à la théorie moderne des probabilités [Sch03a].

Le modèle de Black et Scholes représente aujourd'hui le paradigme d'un *marché complet* où chaque actif contingent peut être parfaitement répliqué par un portefeuille constitué d'actifs primaires sous jacents. En raison de l'absence d'arbitrage, axiome de cette théorie, on en déduit que chaque option a un prix unique, indépendant des préférences de chacun, qui est donné par le coût de cette stratégie de réplication. Des résultats de théorie des probabilités (essentiellement un théorème de représentation des martingales [RY91, KS88]) montrent que cette propriété équivaut en fait à l'existence d'une unique mesure martingale équivalente \mathbb{Q} (souvent appelée *risque-neutre*) sous laquelle les actifs actualisés sont des martingales [MR97]. Cette mesure est en général différente de la mesure *objective* sous laquelle les prix sont observés. Le prix de tout actif financier est alors la moyenne, sous cette nouvelle probabilité, de la valeur actualisée de son pay-off à maturité. Dans les cas les plus simples, comme celui des options européennes, ce calcul d'espérance peut être conduit analytiquement jusqu'au bout et mène à des formules fermées pour le prix et la stratégie de couverture à suivre, avec notamment la célèbre formule de Black-Scholes. Pour des produits exotiques plus complexes, il est nécessaire de faire appel à l'une des nombreuses techniques numériques existantes pour évaluer cette espérance : méthodes de Monte Carlo [BBG97, Jae02], résolution d'EDP [Wil98], etc.

4.1.2 Imperfections et marchés incomplets

Cette perfection théorique ne doit toutefois pas nous faire oublier que nous restons dans le domaine des mathématiques appliquées et de la modélisation. En particulier, il est essentiel de s'assurer de la validité des hypothèses sous jacentes. En l'occurrence ces dernières méritent d'être très largement questionnées. Ainsi la possibilité d'agir en continu est clairement une

idéalisations de la réalité qu'on peut approcher sans néanmoins jamais l'atteindre en pratique. D'autres imperfections existent : très souvent les coûts de transaction ne sont pas négligeables, il est parfois difficile, voire impossible sur certains marchés illiquides, d'acheter le bien financier souhaité, etc. Par ailleurs, comme nous l'avons montré dans le premier chapitre, la modélisation par variables gaussiennes indépendantes rend pauvrement compte de la complexité des cours financiers. L'utilisation de processus plus élaborés comme les processus de Lévy ou les modèles à volatilité aléatoire conduit le plus souvent à des *marchés incomplets* où les stratégies de couverture deviennent beaucoup moins élémentaires. Les biens contingents ne peuvent plus être répliqués par un portefeuille constitué d'actifs de base et le principe de non-arbitrage n'est plus suffisant pour conduire à un prix unique. Il est alors nécessaire d'introduire des critères additionnels, reliés eux aux préférences individuelles des agents [Fol02], et un risque résiduel peut persister [BP00].

Dans ce cadre de travail, une des premières approches proposées fut celle de stratégie de couverture à variance minimale [Sch92]. Celle-ci consiste à trouver la stratégie de portefeuille auto-finançante dont la différence à maturité avec le pay-off final de l'option a la variance la plus faible. Ces travaux ont eu une profonde influence et de nombreux autres travaux présentent des stratégies conceptuellement assez proches [FS91, BS94, ABH⁺00, YP02].

Un des inconvénients de ces méthodes est que la fonction minimisée est quadratique ce qui, par essence, reste très proche de la vision gaussienne et pénalise à la fois les gains et les pertes. D'autres critères, basés sur des moments d'ordre plus élevés de la distribution ou sur la notion de Value-at-Risk (VaR) et ses extensions [ADEH99] ont été récemment proposés dans la littérature [FL99, FL00, SC99, RU00, SB03, Sel03]. Ainsi, dans [FL99], les auteurs se donnent un investissement initial et cherchent à trouver la stratégie de portefeuille qui maximise la probabilité d'une couverture réussie. Dans [FL00] ils généralisent leur approche pour considérer d'autres critères de réussite moins "dichotomique" qu'une probabilité de succès. Traité dans un cadre très général et de manière assez abstraite, le problème se réduit à la réplcation d'une option knockout¹ particulière. Malgré tout son intérêt, cette solution demeure partielle d'un point de vue pratique à cause de sa difficulté d'implémentation. En effet la forme explicite de l'option équivalente n'est connue entièrement que dans certains modèles et, même dans ce cas, la réplcation pratique d'une telle option reste un problème en soi (cette dernière limitation est soulignée par les auteurs eux-mêmes).

Conscients de ces difficultés, nous avons voulu développer une approche plus concrète qui garde constamment en tête le souci de l'implémentation numérique. Notre première méthode est basée sur une simplification optimiste et donne des résultats peu exploitables. Elle a eu toutefois le mérite de nous suggérer la seconde approche, plus prometteuse et qui a fait l'objet d'un article [PB03].

¹Terme général pour désigner une option exotique dont l'exercice à la maturité est conditionnée par la réalisation d'un événement. L'exemple typique est celui des options barrière.

4.2 Première approche : méthode statique

4.2.1 Notations

Nous considérons dans la suite un marché, défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'actif risqué est décrit par un processus stochastique $(x(t), t \in \mathbb{R})$. Nous nous intéresserons à la couverture d'une option de maturité T , de prix d'exercice K et dont la valeur à l'instant initial est supposée connue et donnée par \mathcal{C} .

Nous considérerons dans la suite des stratégies en temps discret et nous noterons $t_k = k\tau$ les dates de rebalancement du portefeuille, τ étant défini par $N\tau = T$. ϕ_k représentera la quantité d'actif présente dans notre portefeuille à la date t_k et δx_k l'incrément de prix entre les instants $k\tau$ et $(k+1)\tau$, soit $\delta x_k = x_k - x_{k+1} = x(k\tau) - x((k+1)\tau)$. Par souci de simplification, nous supposerons que le taux d'intérêt est nul. Ceci n'enlève rien à la généralité de l'approche car il suffit, le cas échéant, de considérer les valeurs actualisées pour retrouver les mêmes équations. Enfin nous supposerons que notre stratégie ϕ_k , $k = 0, \dots, N-1$, est auto-finançante, c'est à dire qu'aucune liquidité n'est ajoutée dans le portefeuille après la date initiale [MR97]. Autrement dit, la variation de richesse ne provient que de la variation des cours, et éventuellement des taux d'intérêt. Dans ce cas, avec une valeur initiale égale au prix de l'option, la richesse finale du vendeur de l'option s'écrit [LL97, MR97, BP00]

$$V_N = \mathcal{C} - (x_N - K)_+ + \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k \delta x_k \quad (4.1)$$

4.2.2 Objectifs

Le but de notre travail est de déterminer une stratégie de couverture, qui assure au vendeur de l'option de ne pas perdre plus qu'une certaine quantité avec une certaine probabilité. Plus précisément, nous nous fixons une valeur seuil et nous cherchons à minimiser la probabilité de dépassement de ce niveau.

Le problème dual présente lui aussi un intérêt : on peut vouloir se fixer une probabilité de dépassement et minimiser le seuil correspondant. Il serait donc intéressant d'adapter notre méthode pour prendre en compte ce critère.

4.2.3 Hypothèses du modèle

Nous chercherons la solution à notre problème sous une forme paramétrique

$$\phi_k = \phi_0 + \lambda(x_k - x_0).$$

où ϕ_0 et λ sont des constantes. Ce choix peut paraître assez simpliste et restrictif (et il l'est !), aussi nous envisagerons plus loin des généralisations possibles.

Avec cette hypothèse (4.1) se réécrit sous une autre forme :

$$\begin{aligned}
V_N &= C - (x_N - K)_+ + \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k \delta x_k \\
&= C - (x_N - K)_+ + \sum_{k=0}^{N-1} \phi_0 \delta x_k + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda (x_k - x_0) \delta x_k \\
&= C - (x_N - K)_+ + \phi_0 (x_N - x_0) + \lambda \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \delta x_j \right) \delta x_k \\
&= C - (x_N - K)_+ + \phi_0 (x_N - x_0) + \lambda \sum_{0 \leq k \leq N-1, j < k} \delta x_j \delta x_k \\
&= C - (x_N - K)_+ + \phi_0 (x_N - x_0) + \frac{\lambda}{2} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \right)^2 - \sum_{k=0}^{N-1} (\delta x_k)^2 \right] \\
&= C - (x_N - K)_+ + \phi_0 (x_N - x_0) + \frac{\lambda}{2} (x_N - x_0)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (\delta x_k)^2 \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Nous ferons ensuite l'hypothèse, forte, que le terme $\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k^2$ fluctue peu et peut raisonnablement être considéré comme constant, égal en première approximation à sa moyenne $\Sigma^2 = \sum_{k=0}^{N-1} E(\delta x_k^2)$. En vertu de la loi des grands nombres, on s'attend à ce que cette simplification soit d'autant mieux vérifiée que N est grand² : en cas d'indépendance l'erreur commise sur ce terme doit en effet décroître comme $N^{-1/2}$. Nous reviendrons sur la légitimité de notre approche un peu plus loin. Avec cette hypothèse supplémentaire, 4.2 s'écrit finalement sous la forme simplifiée :

$$V_N = C - (x_N - K)_+ + \phi_0 (x_N - x_0) + \frac{\lambda}{2} (x_N - x_0)^2 - \frac{\lambda}{2} \Sigma^2 \quad (4.3)$$

4.2.4 Minimisation

Soit \mathcal{R} le seuil (positif) de dépassement qu'on se fixe. On cherche donc ϕ_0 et λ tels que la probabilité $P(V_N < -\mathcal{R})$ soit minimale.

A ϕ_0 et λ fixés et sous la condition

$$-\frac{\phi_0}{\lambda} < K - x_0 < \frac{1 - \phi_0}{\lambda}$$

²Toutefois la présence de fortes corrélations dans la volatilité pourrait rendre cette quantité non ergodique.

$V_N + \mathcal{R}$ en fonction de x_N présente deux minimums locaux. En introduisant les notations adimensionnées suivantes

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} \delta X_k^2 &= \Sigma^2 \\ \frac{x_N - x_0}{\Sigma} &= u \\ \frac{\mathcal{C} + \mathcal{R}}{\Sigma} &= \tilde{\mathcal{C}} \\ \frac{K - x_0}{\Sigma} &= \tilde{K} \\ \lambda \Sigma &= \tilde{\lambda}\end{aligned}$$

cela revient à chercher les minimas d'une fonction de u donnée par

$$H(u) = \tilde{\mathcal{C}} - \frac{\tilde{\lambda}}{2} - (u - \tilde{K})_+ + \phi_0 u + \frac{\tilde{\lambda}}{2} u^2$$

qui sont atteints en

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{\phi_0}{\tilde{\lambda}} \\ u_2 &= \frac{1 - \phi_0}{\tilde{\lambda}}\end{aligned}$$

Ils valent respectivement

$$\begin{aligned}H(u_1) &= \tilde{\mathcal{C}} - \frac{1}{2\tilde{\lambda}} (\tilde{\lambda}^2 + \phi_0^2) \\ H(u_2) &= \tilde{\mathcal{C}} + \tilde{K} - \frac{1}{2\tilde{\lambda}} (\tilde{\lambda}^2 + (1 - \phi_0)^2)\end{aligned}$$

Nous pouvons chercher une condition pour que ces deux minimas soient tous deux positifs. Pour cela, il faut que

$$\phi_0^2 \leq 2\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}^2 \quad (4.4)$$

$$(1 - \phi_0)^2 \leq 2(\tilde{\mathcal{C}} + \tilde{K})\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}^2 \quad (4.5)$$

ce qui nécessite

$$\begin{aligned}\sqrt{2\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}^2} &= 1 - \sqrt{2(\tilde{\mathcal{C}} + \tilde{K})\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}^2} \\ \implies 4\tilde{\lambda}^2(1 + \tilde{K}^2) - 4\tilde{\lambda}(\tilde{K} + 2\tilde{\mathcal{C}}) + 1 &= 0\end{aligned}$$

Cette dernière équation ne peut être vérifiée qu'à la condition

$$\tilde{\mathcal{C}} \geq \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \tilde{K}^2} - \tilde{K} \right] \quad (4.6)$$

Si 4.6 est juste, il est donc possible de trouver des couples (ϕ_0, λ) qui satisfont les conditions 4.4 et 4.5. A priori, ces couples ne sont pas uniques et il convient de les choisir optimalement. La condition 4.6 peut se réécrire en condition sur \mathcal{R}

$$\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_m = \frac{\Sigma}{2}(\sqrt{1 + \tilde{K}^2} - \tilde{K}) - \mathcal{C} \quad (4.7)$$

Il est naturel de choisir \mathcal{R} le plus petit possible c'est à dire $\mathcal{R} = \mathcal{R}_m$ et de trouver le couple $(\phi_0, \tilde{\lambda})$ correspondant

$$\begin{aligned} \phi_0^* &= \frac{1}{2} - \frac{\tilde{K}}{2\sqrt{1 + \tilde{K}^2}} \\ \tilde{\lambda}^* &= \frac{1}{2\sqrt{1 + \tilde{K}^2}} \end{aligned}$$

Le ϕ optimal dans notre approche est donc donné par

$$\phi_k^* = \frac{1}{2} - \frac{K}{2\Sigma\sqrt{1 + \tilde{K}^2}} + \frac{x_k}{2\Sigma\sqrt{1 + \tilde{K}^2}} \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\tilde{K}_k}{2\sqrt{1 + \tilde{K}^2}}, \text{ avec } \tilde{K}_k = \frac{K - x_k}{\Sigma} \quad (4.9)$$

La condition $-\frac{\phi_0^*}{\tilde{\lambda}^*} < K - x_0 < \frac{1 - \phi_0^*}{\tilde{\lambda}^*}$ étant vérifiée, la valeur trouvée est cohérente avec l'existence des deux minimas précédents. Sous l'hypothèse que $\sum \delta x_k^2$ est constant et vaut Σ^2 , la stratégie donnée par 4.9 garantit donc des pertes qui ne peuvent excéder $\mathcal{R}_m = \frac{\Sigma}{2}(\sqrt{1 + \tilde{K}^2} - \tilde{K}) - \mathcal{C}$. L'inégalité précédente suggère d'ailleurs un prix possible pour l'option. $\mathcal{C} = \Sigma(\sqrt{1 + \tilde{K}^2} - \tilde{K})/2$ assure en effet, sous nos hypothèses, que nous ne subissons aucune perte.

Simulations Nous avons comparé la stratégie de Black-Scholes, notre stratégie, ainsi qu'une stratégie un peu modifiée, où on contraint ϕ à appartenir à $[0, 1]$ (ce qui n'est plus garanti précédemment dès que $|K - x_k| > \sqrt{\Sigma^2 + (K - x_0)^2}$). La maturité est gardée constante, égale à un an. x_0 vaut 100 et le strike K vaut 110. Nous avons choisi un modèle additif avec des accroissements gaussiens, centrés et de volatilité σ . Le prix de l'option \mathcal{C} a été calculé par la formule de Black Scholes avec les paramètres qui s'approchent le plus du modèle. Toutefois les hypothèses étant différentes dans les deux cas (nous supposons un modèle additif et non multiplicatif dans la simulation), un biais est introduit mais sans grande importance s'il s'agit de comparer les stratégies entre elles. Nous avons étudié le comportement en fonction du nombre N de rebalancements et de la volatilité des incréments de prix.

En premier lieu, la volatilité des incréments est fixée à 20% et nous considérons successivement les cas $N = 10$, $N = 100$, $N = 500$. Les résultats sont reproduits sur les figures 4.1, 4.2, 4.3. Lorsque N est faible, les 3 méthodes sont relativement comparables, même si la stratégie non contrainte conduit à des résultats plus extrêmes qui apparaissent lorsque ϕ n'est

plus compris entre 0 et 1. Lorsque N augmente, la stratégie Black-Scholes s'améliore considérablement avec un écart type de la distribution finale qui se rapproche de 0. En revanche notre stratégie, même contrainte, progresse nettement moins et devient moins compétitive que la précédente. Assez naturellement, l'effet est amplifié lorsque la volatilité augmente comme le montrent les figures 4.4 et 4.5.

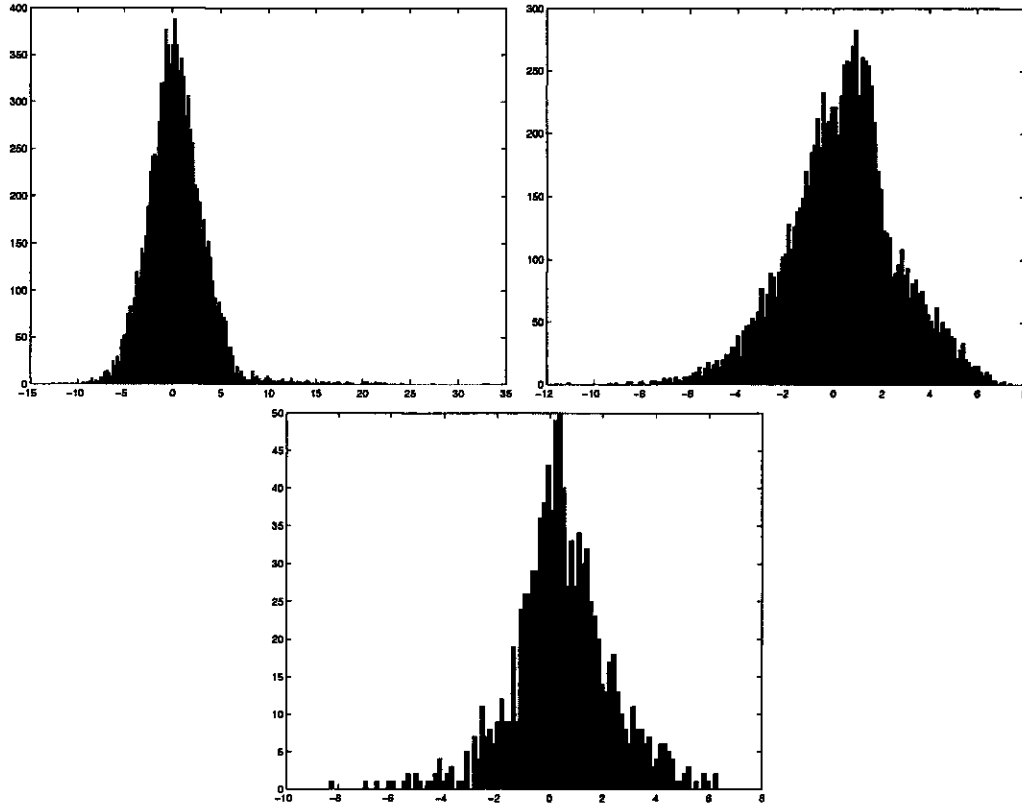


FIG. 4.1: Distribution de la richesse finale lorsque $N=10$. En haut, notre stratégie, au milieu notre stratégie contrainte et en bas la stratégie Black-Scholes.

Evaluation de la probabilité de dépassement Nous pouvons essayer de quantifier la probabilité de dépassement dans le cas de la stratégie sans contrainte. Soient

$$F(v) = C - (v + x_0 - K)_+ + \phi_0 v + \frac{\lambda}{2} v^2 - \frac{\lambda}{2} \Sigma^2$$

et v_1 et v_2 les abscisses des deux minima de cette fonction. Nous noterons

$$\xi = \frac{\lambda}{2} (\Sigma^2 - \sum \delta x_k^2)$$

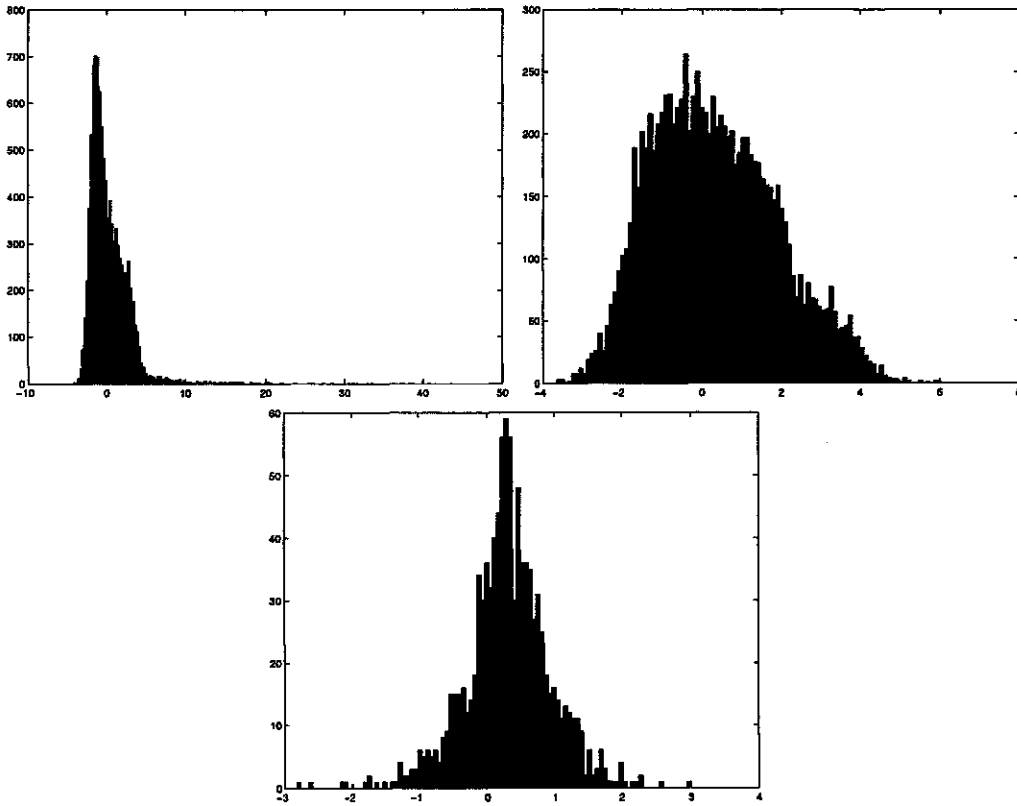


FIG. 4.2: Distribution de la richesse finale lorsque $N=100$. En haut, notre stratégie, au milieu notre stratégie contrainte et en bas la stratégie Black-Scholes.

Si N est suffisamment grand et si les carrés des incréments sont décorrélés ³, le théorème limite central nous apprend que la variable ξ est bien approximée par une loi gaussienne

$$q(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\hat{\sigma}^2}}$$

d'écart-type

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{\lambda \sqrt{N \cdot \text{Var}(\delta x_k^2)}}{2} \\ &= \frac{\lambda \Sigma^2}{\sqrt{2N}} \end{aligned}$$

si les variables δx_k sont gaussiennes. Par définition,

$$V_N = F(x_N - x_0) + \xi = F(v_N) + \xi$$

³le résultat reste valide avec des corrélations à courte portée

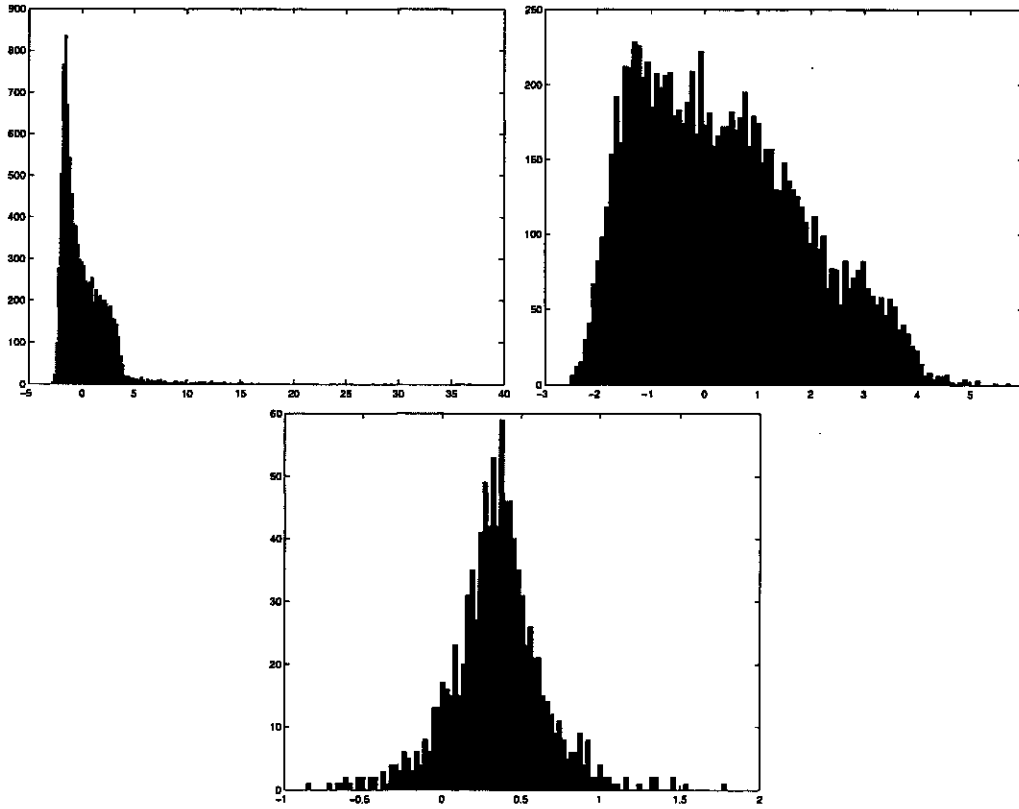


FIG. 4.3: Distribution de la richesse finale lorsque $N=500$. En haut, notre stratégie, au milieu notre stratégie contrainte et en bas la stratégie Black-Scholes. La stratégie Black-Scholes semble conduire à un résultat positif en moyenne. Ceci n'est bien sûr qu'une apparence due au prix initial de l'option qui ne correspond qu'approximativement au modèle. Ceci reste sans incidence sur la comparaison des différentes méthodes puisque le même prix initial est utilisé pour chacune d'entre elles.

La quantité que nous cherchons à évaluer est la probabilité de dépassement, c'est à dire $P(V_N < -\mathcal{R}_m) = P(F(x_N - x_0) + \xi < -\mathcal{R}_m)$.

La densité suivante peut s'écrire :

$$p(\Delta W + \mathcal{R}_m = -y) = \int_v \int_\xi dv d\xi p(v) q(\xi) \delta_{(F(v) + \xi + \mathcal{R}_m = -y)}$$

Les régions qui contribuent au dépassement du seuil \mathcal{R}_m sont, en première approximation, celles situées au voisinage des minima v_1 et v_2 et qui, soumises à une fluctuation gaussienne

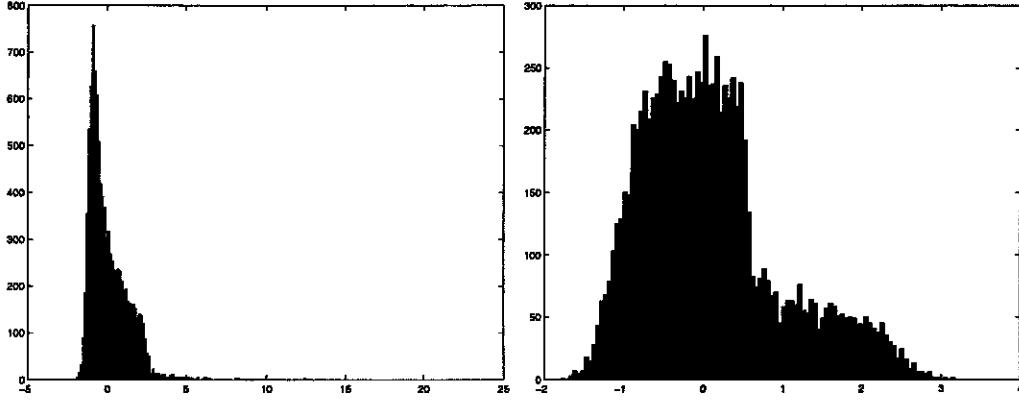


FIG. 4.4: Distribution de la richesse finale pour une volatilité de 10% et pour $N = 100$. En haut notre stratégie et en bas la stratégie contrainte.

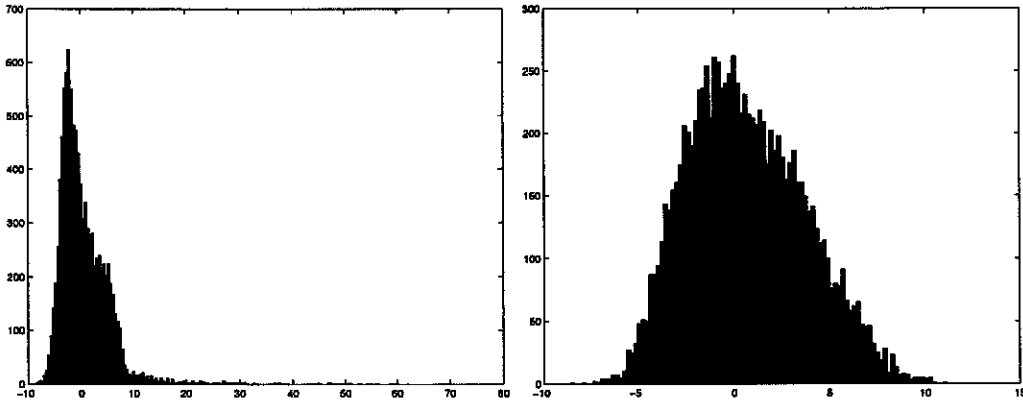


FIG. 4.5: Distribution de la richesse finale pour une volatilité de 40% et pour $N = 100$. En haut notre stratégie et en bas la stratégie contrainte.

ϵ , vérifient $F(u_i + \epsilon) \simeq F(u_i) + \frac{\epsilon^2}{2} F''(u_i) = \mathcal{R}_m + \frac{\lambda \epsilon^2}{2}$ d'où

$$\begin{aligned}
 p(\Delta W + \mathcal{R}_m = -y) &\simeq \sum_{i=1,2} \int_{\epsilon} \int_{\xi} d\epsilon d\xi p(v_i + \epsilon) q(\xi) \delta_{(F(v_i + \epsilon) + \xi + \mathcal{R}_m = -y)} \\
 &\simeq \sum_{i=1,2} \int_{\epsilon} \int_{\xi} d\epsilon d\xi p(v_i + \epsilon) q(\xi) \delta_{(\epsilon^2 \frac{\lambda}{2} + \xi = -y)} \\
 &= \sum_{i=1,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \int_{\epsilon} d\epsilon p(v_i + \epsilon) e^{-\frac{(y + \epsilon^2 \frac{\lambda}{2})^2}{2\hat{\sigma}^2}} \\
 &\simeq \sum_{i=1,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \int_{\epsilon} d\epsilon p(v_i + \epsilon) e^{-\frac{\lambda y \epsilon^2}{2\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{y^2}{2\hat{\sigma}^2}}
 \end{aligned}$$

La probabilité de dépassement s'obtient en intégrant l'expression précédente sur y (l'amplitude du dépassement)

$$P(\Delta W < -\mathcal{R}_m) \simeq \sum_{i=1,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \int_{\epsilon} \int_{y \geq 0} d\epsilon dy p(v_i + \epsilon) e^{-\frac{\lambda y \epsilon^2}{2\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{y^2}{2\hat{\sigma}^2}} \quad (4.10)$$

qui, après le changement de variables

$$\begin{aligned} y &= \hat{\sigma} t \\ w &= \epsilon \sqrt{\frac{\lambda}{\hat{\sigma}}} \end{aligned}$$

se réécrit

$$\begin{aligned} P(\Delta W < -\mathcal{R}_m) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1,2} \int_w \int_{t \geq 0} \sqrt{\hat{\sigma}} p(v_i + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}}{\lambda}} w) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{tw^2}{2}} dw dt \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1,2} \int_w \sqrt{\hat{\sigma}} p(v_i + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}}{\lambda}} w) \frac{e^{w^4/8}}{\sqrt{2\pi}} dw \int_{t \geq w^2/2} e^{-t^2/2} dt \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1,2} \int_w \sqrt{\hat{\sigma}} p(v_i + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}}{\lambda}} w) e^{w^4/8} \text{Erf}(w^2/2) dw \end{aligned}$$

En utilisant l'équivalence

$$e^{w^4/8} \text{Erf}(w^2/2) \sim \frac{2}{w^2}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} &\sqrt{\hat{\sigma}} \int_w p(v_i + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}}{\lambda}} w) e^{w^4/8} \text{Erf}(w^2/2) dw \\ &\stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\hat{\sigma}} \int_{|w| < 1/\sqrt{\hat{\sigma}}} \left[p(v_i) + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}}{\lambda}} w p'(v_i) + \dots \right] e^{w^4/8} \text{Erf}(w^2/2) dw \\ &\stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\hat{\sigma}} \int_{|w| < 1/\sqrt{\hat{\sigma}}} C_0 w^{-2} + C_1 \sqrt{\hat{\sigma}} w^{-1} + \dots + C_n \hat{\sigma}^{n/2} w^{n-2} + \dots dw \\ &\stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} K_0 N^{-1/4} + K_1 N^{-1/2} \ln N + K_2 N^{-1/2} \end{aligned}$$

On déduit du calcul précédent que notre probabilité de dépassement décroît avec N , ce qui est attendu puisque l'hypothèse cruciale de non fluctuation de la volatilité se rapproche de la vérité, mais de façon extrêmement lente, avec une vitesse en $N^{-1/4}$ (et des corrections en $N^{-1/2} \ln N$) bien plus faible que la convergence de notre approximation qui est en $N^{-1/2}$. Ceci montre que notre approche, trop optimiste, n'est sans doute guère applicable en pratique.

On peut calculer exactement le premier terme de notre développement précédent en reprenant

l'expression 4.10

$$\begin{aligned}
 P(\Delta W < -\mathcal{R}_m) &\simeq \sum_{i=1,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \int_{\epsilon} \int_{y \geq 0} d\epsilon dy p(v_i + \epsilon) e^{-\frac{\lambda y \epsilon^2}{2\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{y^2}{2\hat{\sigma}^2}} \\
 &\simeq \sum_{i=1,2} \int_{y \geq 0} dy e^{-\frac{y^2}{2\hat{\sigma}^2}} \frac{p(v_i)}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \int_{\epsilon} d\epsilon e^{-\frac{\lambda y \epsilon^2}{2\hat{\sigma}^2}} \\
 &\simeq \frac{p(v_1) + p(v_2)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y^2}{2\hat{\sigma}^2}} \\
 &= \frac{p(v_1) + p(v_2)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{\hat{\sigma}}}{2^{3/4}} \int_0^{\infty} u^{-3/4} e^{-u} du \\
 &= \frac{\Sigma(p(v_1) + p(v_2))}{2} \Gamma(1/4) N^{-1/4} \\
 &= \mathcal{K} N^{-1/4}
 \end{aligned}$$

Si on choisit les mêmes valeurs de paramètres que précédemment, alors

$$\begin{aligned}
 p(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\Sigma^2}} \\
 v_1 &= -\Sigma\sqrt{1 + \tilde{K}^2} + \Sigma\tilde{K} \\
 v_2 &= \Sigma\sqrt{1 + \tilde{K}^2} + \Sigma\tilde{K} \\
 \tilde{K} &= \frac{K - x_0}{\Sigma}
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathcal{K} = \Gamma(1/4) \frac{e^{-\frac{1+\tilde{K}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cosh \tilde{K} \sqrt{1 + \tilde{K}^2} \quad (4.11)$$

Nous pouvons vérifier à l'aide de simulations que le calcul précédent donne le bon ordre de grandeur de la probabilité de dépassement. D'après la formule, la probabilité de dépassement ne dépend des différents paramètres que par l'intermédiaire de \tilde{K} . Pour tester ce résultat, nous avons donc évalué cette probabilité (empiriquement, sur 5000 trajectoires) en fonction de N pour un \tilde{K} fixé à 0.5, mais avec différentes valeurs de la volatilité. Les résultats, donnés dans le tableau 4.1 montrent que la probabilité varie très peu.

Dans un second temps, pour étudier la dépendance selon \tilde{K} nous avons gardé la volatilité constante (à 20%) et fait varier le strike K . Les résultats sont reproduits dans le tableau 4.2. Sur le graphique 4.6 nous avons tracé ces probabilités en fonction de N en échelle log-log. Ces graphiques sont proches de la linéarité, ce qui est en accord avec nos résultats.

Nous pouvons faire la même étude à strike constant et en faisant varier la volatilité. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.3 et la figure 4.7.

Pour être plus précis, nous avons effectué une régression linéaire des différents tracés dont nous donnons les équations dans le tableau 4.4. Il y apparaît que la puissance théorique de N à laquelle la probabilité décroît ($-1/4$) est en accord avec les résultats trouvés. En

	σ					
	0.05	0.1	0.15	0.20	0.30	0.40
$N = 10$	20.14%	20.38%	20.68%	20.90%	21.34%	20.38%
$N = 32$	16.58%	16.46%	16.72%	17.02%	17.24%	17.68%
$N = 100$	13.22%	12.80%	13.62%	13.00%	12.80%	12.56%
$N = 317$	10.42%	9.74%	9.96%	9.24%	9.70%	9.50%
$N = 1000$	7.50%	7.42%	7.74%	7.08%	7.36%	7.58%

TAB. 4.1: Probabilité de dépassement en fonction de σ , à \tilde{K} fixé. Conformément à notre prédiction, les résultats varient très peu en fonction de σ .

	K			
	0.25	0.50	0.75	1
$N = 10$	22.12%	20.38%	19.32%	16.02%
$N = 32$	18.06%	16.46%	15.22%	13.34%
$N = 100$	13.72%	12.80%	11.90%	11.62%
$N = 317$	10.34%	9.74%	9.22%	8.26%
$N = 1000$	8.54%	7.42%	6.86%	6.62%

TAB. 4.2: Probabilité de dépassement en fonction de \tilde{K} , à σ fixé.

	K			
	0.25	0.50	0.75	1
$N = 10$	22.86%	20.38%	20.16%	16.80%
$N = 32$	17.66%	16.46%	15.02%	14.48%
$N = 100$	14.44%	12.80%	11.72%	11.14%
$N = 317$	10.92%	9.74%	9.06%	8.64%
$N = 1000$	8.08%	7.42%	6.64%	6.86%

TAB. 4.3: Probabilité de dépassement en fonction de \tilde{K} , à K fixé.

revanche la valeur du préfacteur diffère elle systématiquement de notre prédiction d'un facteur 2 approximativement. Ceci peut s'expliquer par la contribution des premiers termes correctifs en $N^{-1/2} \ln N$, négligeables si N est grand mais pas lorsque les valeurs de N se situent encore, comme ici, dans la zone transitoire non asymptotique.

4.2.5 Conclusions et extensions possibles

Nous avons présenté une méthode simple pour déterminer la stratégie de couverture d'une option qui minimiserait une probabilité de perte finale. Malheureusement elle est basée sur une simplification extrême du problème et conduit à des résultats peu exploitables en pratique.

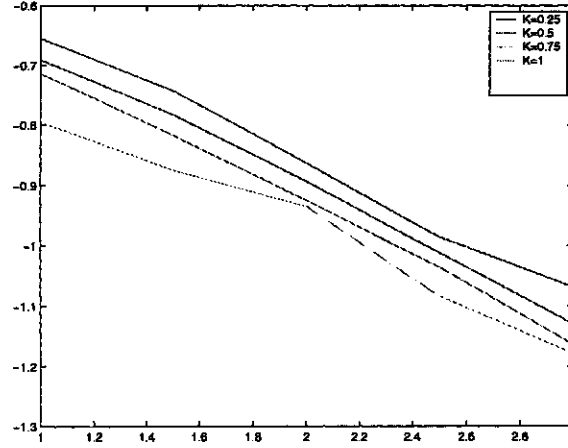


FIG. 4.6: Probabilité de dépassement en fonction de N (tracé log-log). La volatilité est constante (20%) et le strike varie. Les tracés semblent linéaires ce qui indique une décroissance de la probabilité en fonction de N selon une loi puissance, conformément à nos prédictions. Le résultat de la régression est donné dans le tableau 4.4.

	prédiction	à σ fixé	à strike fixé
$\tilde{K} = 0.25$	$-0.070 - 0.25 \log N$	$-0.44 - 0.21 \log N$	$-0.41 - 0.22 \log N$
$\tilde{K} = 0.25$	$-0.101 - 0.25 \log N$	$-0.46 - 0.22 \log N$	$-0.46 - 0.22 \log N$
$\tilde{K} = 0.25$	$-0.133 - 0.25 \log N$	$-0.48 - 0.22 \log N$	$-0.46 - 0.24 \log N$
$\tilde{K} = 0.25$	$-0.153 - 0.25 \log N$	$-0.58 - 0.20 \log N$	$-0.56 - 0.20 \log N$

TAB. 4.4: Logarithme de la probabilité de dépassement en fonction de $\log N$. Nous donnons les prédictions ainsi que les valeurs trouvées empiriquement.

En particulier, nous avons montré que, même dans un cas simple, l'approximation que nous faisons avec notre hypothèse conduit à une erreur finale qui décroît beaucoup plus lentement que l'approximation elle-même.

Nous pouvons donc nous interroger sur la façon d'améliorer notre approche.

Nous pouvons tout d'abord envisager de généraliser la forme proposée pour ϕ dans (4.2.3). Par exemple nous pouvons chercher la solution sous la forme

$$\phi_k = \phi_0 + A(x_k - x_0) + B(x_k - x_0)^2 + C(x_k - x_0)^3 \quad (4.12)$$

Dans ce cas, pour les mêmes raisons que précédemment, (4.3) s'écrit

$$\begin{aligned} V_N = & C - (X_N - K)_+ + \phi_0(x_N - x_0) + \frac{A}{2}(x_N - x_0)^2 \\ & + \frac{B}{3}(x_N - x_0)^3 + \frac{C}{4}(x_N - x_0)^4 \\ & - \frac{A}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k^2 - \frac{B}{3} \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k^3 - \frac{C}{4} \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k^4. \end{aligned}$$

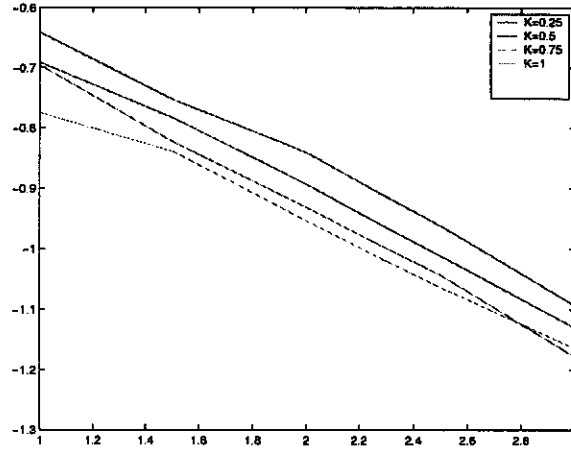


FIG. 4.7: Probabilité de dépassement en fonction de N (tracé log-log). Le strike est constant (110) et la volatilité varie. Les tracés semblent également linéaires. Le résultat de la régression se trouve dans le tableau 4.4.

A partir de là, il est sans doute possible de mener des calculs similaires aux précédents, quoique plus compliqués. Néanmoins nous ferons toujours appel à des hypothèses de faibles fluctuations, de moins en moins justifiées lorsque la puissance de δx augmente. Or, nous avons vu que c'est précisément une des raisons de l'échec de notre méthode. Par ailleurs, la forme sous laquelle nous cherchons la solution reste très contraignante et en particulier ne fait pas intervenir le paramètre temps (ϕ_0 et λ sont constants).

Nous pourrions considérer pour ϕ une forme radicalement différente, qui prendrait mieux en compte cet aspect temporel. Par exemple une fonction comme

$$\phi_k(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{\lambda(x_k - K)}{\Sigma(T - t_k)} \right) \right)$$

pourrait être envisagée. Dans ce cas, il n'est plus possible de faire des calculs analytiques comme précédemment. En revanche, il est possible de trouver numériquement les paramètres optimaux grâce à des simulations. Le développement de ces idées a conduit à la méthode dynamique qui fait l'objet de la prochaine section.

4.3 Méthode dynamique

4.3.1 Principe

La méthode que nous présentons maintenant est une mise en forme sophistiquée des idées discutées précédemment. Elle doit également beaucoup à l'approche développée dans [PBS01] dont elle est une généralisation.

Le but est ici de construire un portefeuille auto-finançant, dont les variations de richesse ne dépendent donc que des fluctuations de l'actif, qui à chaque instant minimise la mesure de risque locale adoptée. Si nous appelons $\phi_k(x_k)$ la fraction d'actif risqué, à un cours x_k ,

contenue dans le portefeuille au temps k , la condition d'autofinancement entre les temps t_k et t_{k+1} conduit à l'équation [PBS01]

$$\Delta W_k = e^\rho C_k(x_k) - C_{k+1}(x_{k+1}) + \phi_k(x_k)(x_{k+1} - e^\rho x_k) \quad (4.13)$$

Nous mesurons la qualité de la réplication localement par une fonction de risque $\mathcal{U}(\Delta W_k)$. Le risque moyen est obtenu en moyennant sur les trajectoires du processus de prix (sous la probabilité objective) :

$$\mathcal{R}_k = E(\mathcal{U}(\Delta W_k)) \quad (4.14)$$

Notre algorithme ne dépend pas de manière cruciale de la fonction de risque qui peut donc être choisie très librement. Par exemple, l'utilisation d'une fonction quadratique correspond à la méthode proposée dans [PBS01]. Dans nos applications, nous avons privilégié une fonction $\mathcal{U}(\Delta W_k)$ qui pénalise les pertes au delà d'un seuil $-\Delta_0 < 0$

$$\mathcal{U}(\Delta W_k) = (\Delta_0 - \Delta W_k)_+^q = |\Delta_0 - \Delta W_k|^q \mathbf{1}_{\Delta W_k < \Delta_0} \quad (4.15)$$

En particulier l'exposant $q = 1$ correspond à un "expected shortfall" local inconditionnel. Le choix d'un exposant plus grand conduirait à une pénalisation plus importante des pertes extrêmes. D'un point de vue financier, cette approche correspond à des préoccupations pratiques : nous cherchons à contrôler durant toute la période de vie de l'option (et non pas seulement à son expiration) les occurrences de pertes. Le problème d'optimisation consiste à trouver les fonctions $C_k(x)$ and $\phi_k(x)$ vérifiant 4.13 et qui minimise 4.15. Nous inspirant d'idées déjà présentes en partie dans [LS01, TVR01], nous le résolvons en utilisant une méthode de Monte Carlo qui présente en outre l'avantage d'autoriser des processus très généraux pour l'évolution du cours des actifs. Pour réduire la dimension du problème, nous paramétrons les fonctions $C_k(x)$ and $\phi_k(x)$ par un nombre fini de variables. Nous pouvons par exemple les décomposer selon un ensemble fixe de fonctions de base

$$C_k(x) = \sum_{a=1}^p \gamma_a^k C_a^k(x) \quad (4.16)$$

$$\phi_k(x) = \sum_{a=1}^p \varphi_a^k F_a^k(x) \quad (4.17)$$

Ainsi le problème d'optimisation fonctionnelle original devient une optimisation numérique, avec une minimisation qui porte désormais sur les coefficients γ_a^k et φ_a^k . En choisissant convenablement et en nombre suffisant les fonctions de base, nous conservons une bonne approximation de la vraie solution.

Le problème est ensuite résolu en travaillant de manière rétrograde, à partir de la maturité où l'option vaut son pay-off final jusqu'à la date d'émission. A chaque instant k nous le décomposons en plusieurs étapes :

- Avec une discrétisation temporelle suffisamment fine, nous pouvons approximer $C_k(x_k)$ par $C_{k+1}(x_k)$ dont la forme fonctionnelle est déjà connue à cet instant.⁴ Nous avons alors

⁴Cette approximation pourrait être améliorée en tenant compte de la dérivée temporelle de $C_k(x_k)$: $C_k(x_k) \simeq 2C_{k+1}(x_k) - C_{k+2}(x_k)$. Compte tenu des bons résultats de la méthode originale, nous n'avons pas testé cette variante.

à trouver les coefficients φ_a^k qui minimisent le risque moyen sur les N_{MC} chemins :

$$\mathcal{R}_k^* = \sum_{\ell=1}^{N_{MC}} \left(\Delta_0 - \left(e^\rho C_{k+1}(x_k^\ell) - C_{k+1}(x_{k+1}^\ell) \right) - (x_{k+1}^\ell - e^\rho x_k^\ell) \sum_{a=1}^p \varphi_a^k F_a^k(x_k^\ell) \right)_+.$$

Nous avons utilisé une méthode basée sur le gradient [VTP93] mais d'autres procédures (méthodes d'apprentissage par exemple) peuvent évidemment être envisagées. Les dérivées partielles de \mathcal{R}_k^* par rapport aux coefficients φ_a^k se calculent aisément :

$$\frac{\partial \mathcal{R}_k^*}{\partial \varphi_a^k} = - \sum_{\ell=1}^{N_{MC}} (x_{k+1}^\ell - e^\rho x_k^\ell) F_a^k(x_k^\ell) \mathbf{1}_{\Delta W_k^\ell < \Delta_0}.$$

A l'issue de cette étape nous connaissons la forme de $\phi_k(x)$.

- Comme, en moyenne, le bilan local doit être nul, nous pouvons maintenant calculer les coefficients γ_a^k en résolvant le problème de moindres carrés

$$\min_{\gamma} \sum_{\ell=1}^{N_{MC}} \left[\sum_{a=1}^p \gamma_a^k C_a^k(x_k^\ell) - e^{-\rho} \left(C_{k+1}(x_{k+1}^\ell) - \phi_k(x_k^\ell) (x_{k+1}^\ell - e^\rho x_k^\ell) \right) \right]^2,$$

pour lequel des procédures standard existent [VTP93].

4.3.2 Précisions sur l'implémentation

Pour tester notre algorithme nous avons comparé les résultats obtenus avec une stratégie standard de Black-Scholes et ceux obtenus en suivant notre stratégie pour plusieurs valeurs du seuil Δ_0 . Nous valorisons une option européenne avec un sous-jacent unique, de maturité 1 an et avec un taux d'intérêt de 3% et une volatilité annuelle $\sigma = 20\%$. Le nombre de dates de rebalancement est pris égal à $N = 10$. Le cours initial de l'actif est $x_0 = 100$ et nous utilisons une simulation avec $N_{MC} = 20000$ trajectoires. Nous considérons en premier lieu des réalisations d'un mouvement brownien géométrique avec un drift constant $\mu = 0.05$:

$$\frac{\delta x_t}{x_t} = \mu \delta t + \sigma \delta W_t$$

Toutefois, comme nous l'avons déjà signalé à plusieurs reprises, une telle modélisation reste très approximative, les séries financières présentant notamment des queues de distribution nettement plus épaisses. Pour prendre en compte au moins qualitativement ce fait nous utilisons par la suite un processus de prix où nous remplaçons le mouvement brownien précédent W_t par un processus L_t plus sauvage dont les incréments, indépendants, sont distribués suivant une loi de Student (parfois appelée distribution t), avec respectivement $\nu = 4$ et $\nu = 6$ degrés de liberté :

$$\frac{\delta x_t}{x_t} = \mu \delta t + \sigma \delta L_t$$

Nous ne prétendons pas que cette distribution soit parfaite, mais elle est au moins qualitativement plus proche de la réalité qu'une modélisation gaussienne⁵ et permettra de tester notre méthode dans des conditions plus extrêmes.

La valeur de ν caractérise la vitesse de décroissance de la distribution pour de grandes valeurs ($f(x) \sim \frac{1}{|x|^{1+\nu}}$, $x \rightarrow \infty$). $\nu = 4$ est une valeur assez réaliste et observée dans les marchés tandis que $\nu = 6$ correspond à des queues légèrement moins épaisses ; à la limite $\nu \rightarrow \infty$ nous retrouvons le modèle usuel de Black-Scholes. Notons que certains marchés peu liquides et extrêmement fluctuants (marchés et monnaies émergents notamment) présentent des exposant de décroissance plus faibles : ainsi $\nu \approx 1.5$ pour le peso mexicain.

Nous utilisons $p = 20$ fonctions de base, ce qui conduit à une approximation suffisamment fine. Comme dans [PBS01] nous choisissons pour F_a^k des fonctions linéaires par morceaux et pour C_a^k des fonctions quadratiques par morceaux avec pour les deux les mêmes points d'arrêt adaptatifs. Ces points d'arrêt sont choisis de manière à ce qu'il y ait toujours le même nombre de trajectoires simulées, $N_{MC}/(p+2)$, tombant entre deux points successifs. F_a^k vaut 0 avant le a^{eme} point d'arrêt, 1 au delà du $a + 1^{eme}$ et croît linéairement entre des deux valeurs. C_a^k est l'intégrale de F_a^k valant 0 en deçà du a^{eme} point d'arrêt.

Nos simulations ont été menées de la manière suivante : nous commençons par générer un ensemble de trajectoires et nous appliquons notre algorithme pour trouver les coefficients γ_a^k and φ_a^k , i.e. le prix de l'option et la couverture optimale. Nous simulons ensuite un nouvel ensemble de trajectoires pour calculer les différents indicateurs statistiques des performances de la stratégie présentée.

4.3.3 Résultats

Marché gaussien Nous présentons tout d'abord les résultats obtenus dans le cadre du modèle de Black-Scholes. Comme une réplication parfaite (et donc un shortfall nul pour tout $\Delta_0 < 0$) est théoriquement possible dans ce cas, nous nous attendons à ce que notre stratégie conduise à des résultats proches de la stratégie de Black-Scholes. C'est ce que nous observons sur la figure 4.8 où nous avons tracé, pour un prix d'exercice $K = 110$, les solutions optimales trouvées pour différentes valeurs de Δ_0 et la solution de Black-Scholes : elles paraissent toutes très proches, en particulier pour de faibles valeurs de Δ_0 (-0.5 and -1).

Cette observation est confirmée dans la figure 4.9 par la forme des distributions de la valeur finale à la maturité de l'option, elles aussi très semblables pour les différentes stratégies.

Marché non-gaussien Nous nous intéressons au cas plus intéressant d'un marché gouverné par un processus plus large et pour lequel il n'existe plus de réplication parfaite. L'utilisation de critères subjectifs étant maintenant nécessaire pour déterminer le prix et la stratégie de couverture de l'option, nous nous attendons à observer des stratégies distinctes suivant les valeurs choisies pour le seuil Δ_0 . Nos prédictions sont confirmées empiriquement comme le montre la figure 4.10. En particulier, nous observons qu'une couverture des risques extrêmes (correspondant à une grande valeur de $|\Delta_0|$) mène à une fonction $\phi(x)$ beaucoup plus plate

⁵Cette modélisation peut être toutefois affinée et rendue plus réaliste. Ainsi, dans [Bor02], l'auteur développe pour la valorisation d'options un modèle de cours où la distribution à chaque échelle de temps est une loi de Student.

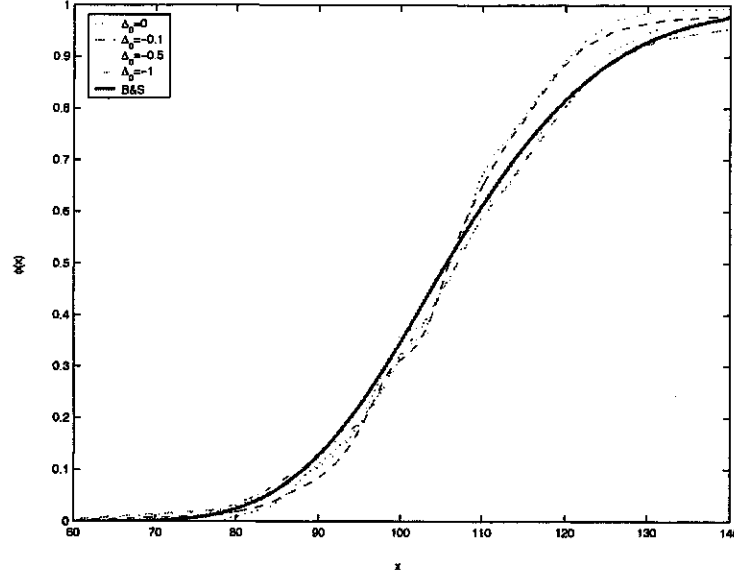


FIG. 4.8: Quantité optimale ϕ d'actif risqué dans le portefeuille de couverture en fonction du cours x de l'actif, dans le cas d'un marché log-normal et pour différentes stratégies. En raison de la possibilité d'une réplcation théorique parfaite, les courbes restent très proches l'une de l'autre. Le prix d'exercice est ici fixé à $K = 110$ et les courbes sont tracées à mi-maturité : $k = N/2$.

(soit, en termes plus financiers, un Gamma plus faible). Ceci avait déjà été observé dans [SB03, BP00] et peut être de grand intérêt en présence de frais de transaction. Nous reviendrons sur ce point dans une section ultérieure.

Il est intéressant de vérifier que la minimisation souhaitée est effective, c'est à dire que notre stratégie conduit à un shortfall plus faible. Les tableaux 4.5 and 4.6 le confirment : nous y donnons, pour quatre stratégie, les shortfalls inconditionnels $\mathcal{R}(\Delta)$ (qui font l'objet de la minimisation) ainsi que les shortfalls conditionnels (notés $\text{ESF}(\Delta)$, ils sont plus communs dans la littérature financière) définis comme $\mathcal{R}(\Delta)/\mathcal{P}(\Delta)$, où $\mathcal{P}(\Delta)$ est la probabilité d'excéder le seuil Δ . Tous deux sont calculés à mi-maturité entre les deux dates de rebalancement du portefeuille $N/2$ et $N/2 + 1$, et pour trois valeurs du seuil $\Delta = 0, -5, -10$.

Nous pouvons également vérifier que la méthode, locale par construction, produit des résultats satisfaisants pour des quantités globales. Nous présentons dans les figures 4.11 et 4.12 les distributions finales des profits et pertes. Clairement la stratégie proposée permet de diminuer la taille des pertes extrêmes (notons toutefois qu'en raison de la leptokurticité et du nombre réduit de rebalancement celles ci sont susceptibles de demeurer conséquentes). En outre nous observons un changement intrigant dans la forme même de la distribution : alors qu'elle est relativement piquée pour de faibles $|\Delta_0|$ avec un nombre appréciable d'événements extrêmes, elle devient plus large mais sur un support plus compact lorsque $|\Delta_0|$ augmente. Ceci peut se comprendre qualitativement : lorsque $|\Delta_0|$ est important, la contrainte est plus facile à vérifier mais les pertes d'amplitude inférieure à $|\Delta_0|$ ne sont pas pénalisées, d'où une distribution finale plus nettement tronquée sur son support mais aussi plus étalée.

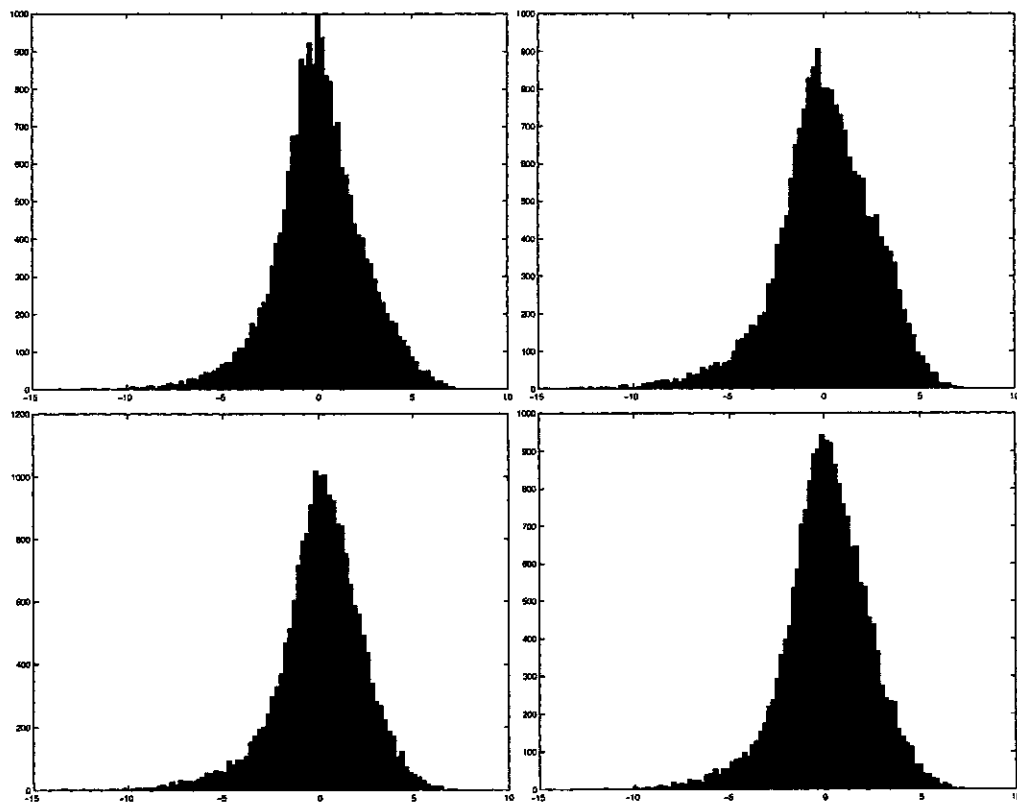


FIG. 4.9: Distribution de la richesse finale pour différentes stratégies et dans le cas d'un marché log-normal. Le prix d'exercice est $K = 110$. (en haut, à gauche : BS ; en haut, à droite : $\Delta_0 = 0$; en bas, à gauche : $\Delta_0 = -0.5$; en bas, à droite : $\Delta_0 = -1$).

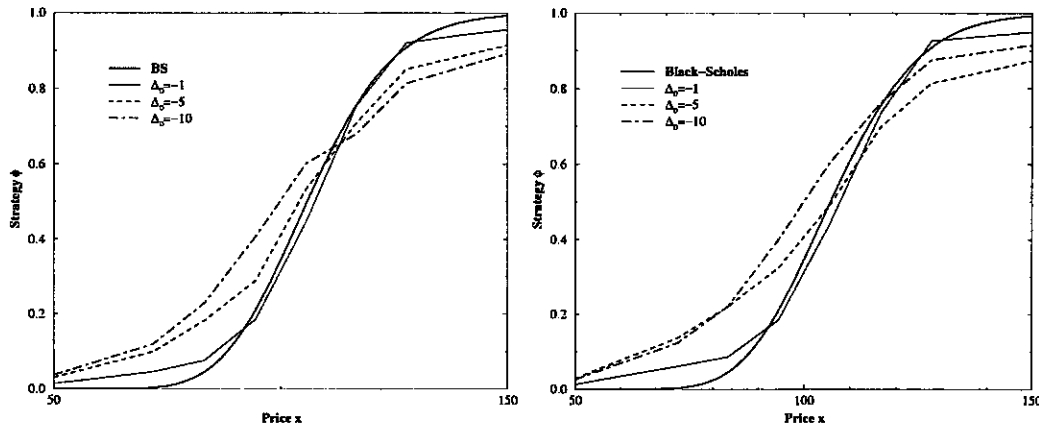


FIG. 4.10: Quantité optimale ϕ d'actif risqué dans le portefeuille de couverture en fonction du cours x de l'actif, dans le cas d'un marché extrême (en haut $\nu = 6$ et en bas $\nu = 4$) et pour différentes stratégies. En raison de l'incomplétude, le choix du critère à optimiser devient important et les courbes présentent maintenant de fortes différences. Le prix d'exercice est ici fixé à $K = 110$ et les courbes sont tracées à mi-maturité : $k = N/2$.

	stratégie			
	BS	$\Delta_0 = 0$	$\Delta_0 = -5$	$\Delta_0 = -10$
ESF(0)	-0.77	-0.88	-0.93	-1.19
ESF(-5)	-2.26	-2.32	-2.17	-1.98
ESF(-10)	-4.38	-4.00	-3.05	-2.21
$\mathcal{R}(0)$	-0.22	-0.25	-0.33	-0.44
$\mathcal{R}(-5)$	-0.011	-0.014	-0.010	-0.015
$\mathcal{R}(-10)$	-0.002	-0.003	-0.002	-0.001

TAB. 4.5: Expected shortfall conditionnel (ESF) et inconditionnel \mathcal{R} , pour différents seuils Δ_0 and différentes stratégies, dans le cas $\nu = 6$. Ces quantités *locales* sont calculées à mi-maturité de l'option (soit ici 6 mois) et pour un strike $K = 110$.

Nous donnons dans les tables 4.7 et 4.8 la moyenne et l'écart type de ces distributions finales ainsi que les prix initiaux des options et les Value-at-Risk et expected shortfalls associés. Notons que le prix de l'option avec notre stratégie diminue lorsque $|\Delta_0|$ augmente et qu'il est toujours moins élevé que le prix Black-Scholes pour une faible moneyness. Ceci ne doit pas nous étonner ; en effet une kurtosis non nulle induit une baisse de la volatilité implicite à la monnaie [BP00] ce qui est confirmé par la figure 4.13.

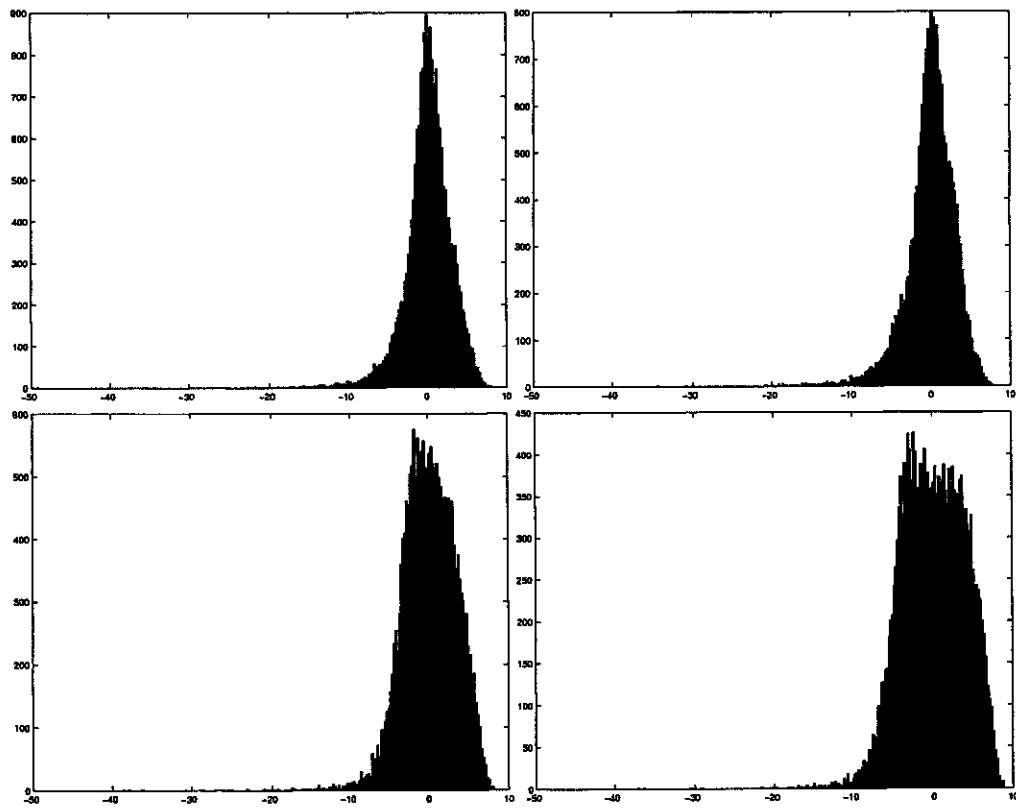


FIG. 4.11: Distribution de la richesse finale pour différentes stratégies et dans le cas d'un marché extrême ($\nu = 6$). Le prix d'exercice est $K = 110$. (en haut, à gauche : BS ; en haut, à droite : $\Delta_0 = 0$; en bas, à gauche : $\Delta_0 = -5$; en bas, à droite : $\Delta_0 = -10$).

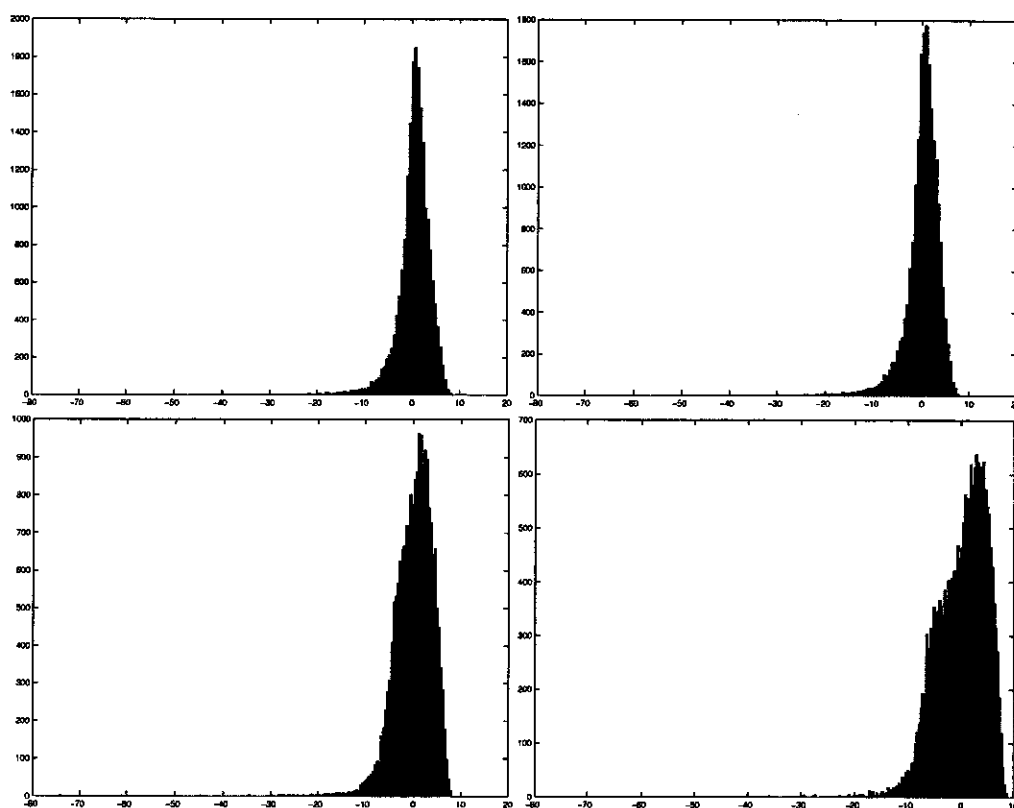


FIG. 4.12: Distribution de la richesse finale pour différentes stratégies et dans le cas d'un marché extrême ($\nu = 4$). Le prix d'exercice est $K = 110$. (en haut, à gauche : BS ; en haut, à droite : $\Delta_0 = 0$; en bas, à gauche : $\Delta_0 = -5$; en bas, à droite : $\Delta_0 = -10$).

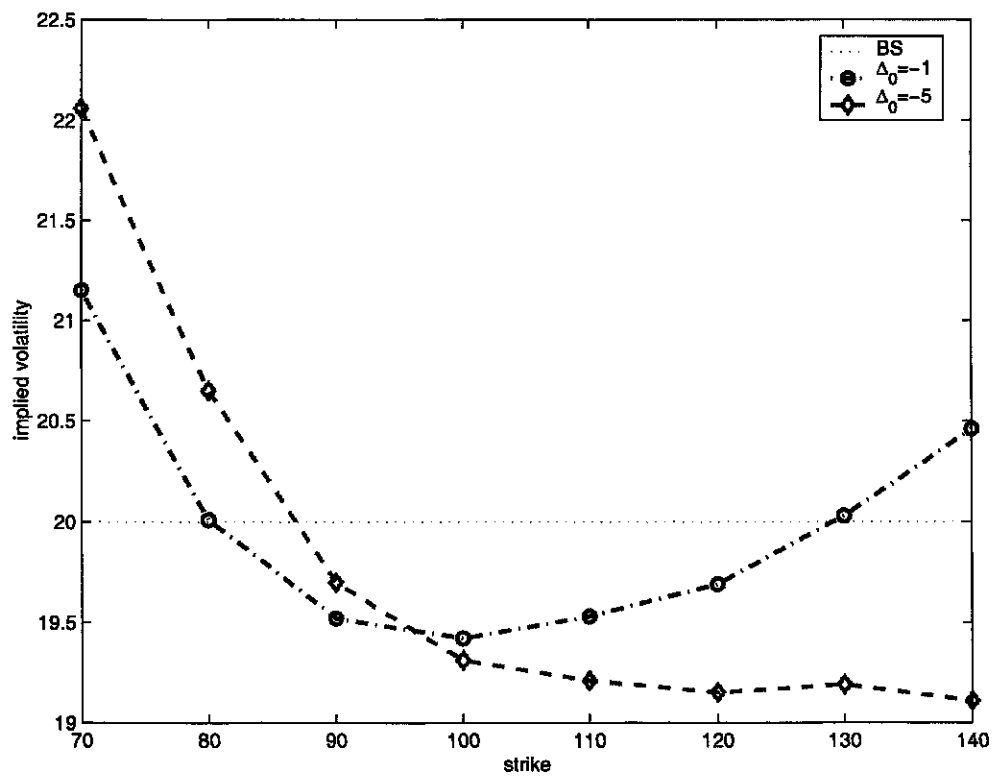


FIG. 4.13: Volatilité implicite à $t = 0$ et pour différents seuils Δ_0 . Ici $\nu = 4$ et le cours initial de l'actif est $S_0 = 100$. Le caractère non-gaussien de la dynamique induit une volatilité implicite non constante (phénomène de smile) dont la forme varie très nettement en fonction du critère optimisé.

	stratégie			
	BS	$\Delta_0 = 0$	$\Delta_0 = -5$	$\Delta_0 = -10$
ESF(0)	-0.88	-1.04	-1.04	-1.10
ESF(-5)	-4.45	-4.40	-3.94	-3.15
ESF(-10)	-8.58	-8.60	-7.76	-5.90
$\mathcal{R}(0)$	-0.23	-0.25	-0.35	-0.38
$\mathcal{R}(-5)$	-0.031	-0.035	-0.028	-0.028
$\mathcal{R}(-10)$	-0.015	-0.016	-0.011	-0.009

TAB. 4.6: Expected shortfall conditionnel (ESF) et inconditionnel \mathcal{R} , pour différents seuils Δ_0 and différentes stratégies, dans le cas $\nu = 4$. Ces quantités *locales* sont calculées à mi-maturité de l'option (soit ici 6 mois) et pour un strike $K = 110$.

	stratégie			
	BS	$\Delta_0 = 0$	$\Delta_0 = -5$	$\Delta_0 = -10$
prix de l'option	5.29	5.15	5.14	5.08
moyenne de la richesse finale	0.15	0.01	0.03	0.04
écart-type de la richesse finale	3.11	3.23	3.41	4.01
VaR à 0.1%	-21.81	-20.77	-19.04	-18.40
ESF à 0.1%	-7.96	-8.50	-7.63	-6.73
VaR à 1%	-10.04	-10.63	-8.82	-9.47
ESF à 1%	-4.88	-4.91	-4.41	-3.69
VaR à 5%	-4.85	-5.39	-5.28	-6.19
ESF à 5%	-3.39	-3.46	-2.56	-2.28

TAB. 4.7: Quelques caractéristiques statistiques de la distribution finale des profits et pertes pour $\nu = 6$. Le strike est $K = 110$.

4.4 Application aux coûts de transaction

Nous l'avons mentionné précédemment, la couverture contre des risques extrêmes conduit à des stratégies variant moins avec le cours du sous-jacent. Ceci peut être d'un grand intérêt en présence de frais de transaction d'où notre motivation pour les incorporer à l'approche précédente afin de déterminer leur impact sur le prix et la stratégie optimale trouvée. Des résultats et des propositions de stratégie à suivre dans le cadre d'un marché gaussien existent dans la littérature [Lel85, Wil98], tandis que [Sel03] présente une discussion théorique et des résultats empiriques dans un cas non gaussien. De manière assez standard, nous modélisons ces frictions en ajoutant au bilan local 4.13 un terme proportionnel à la quantité d'actifs achetée ou vendue et à son cours

$$\Delta W_k = e^\rho C_k(x_k) - C_{k+1}(x_{k+1}) + \phi_k(x_k)(x_{k+1} - e^\rho x_k) - \beta x_k |\phi_k - \phi_{k-1}| \quad (4.18)$$

	stratégie			
	BS	$\Delta_0 = 0$	$\Delta_0 = -5$	$\Delta_0 = -10$
prix de l'option	5.29	5.08	4.99	4.89
moyenne de la richesse finale	0.29	0.09	0.07	0.09
écart-type de la richesse finale	4.02	4.12	4.20	4.82
VaR à 0.1%	-34.90	-36.49	-28.37	-27.45
ESF à 0.1%	-16.14	-15.21	-14.05	-9.87
VaR à 1%	-13.59	-14.28	-12.08	-12.72
ESF à 1%	-9.34	-9.34	-7.85	-6.06
VaR à 5%	-5.58	-6.19	-6.32	-7.76
ESF à 5%	-5.48	-5.55	-4.23	-3.51

TAB. 4.8: Quelques caractéristiques statistiques de la distribution finale des profits et pertes pour $\nu = 4$. Le strike est $K = 110$.

βx_k représente donc le coût de transaction unitaire. En suivant la même procédure qu'auparavant, nous sommes amenés à minimiser la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k^* = & \sum_{\ell=1}^{N_{MC}} \left(\Delta_0 - \left(e^\rho C_{k+1}(x_k^\ell) - C_{k+1}(x_{k+1}^\ell) \right) - (x_{k+1}^\ell - e^\rho x_k^\ell) \phi_k(x_k^\ell) \right. \\ & \left. + \beta x_k^\ell |x_k^\ell - x_{k-1}^\ell| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_k^\ell) \right)_+, \end{aligned}$$

où nous avons approximé $|\phi_k - \phi_{k-1}|$ par $\frac{\partial \phi}{\partial x} |\Delta x|$. Cette hypothèse, justifiée si la discrétisation en temps reste assez fine, est cruciale pour rendre le problème soluble. Comme elle implique la dérivée de ϕ_k , nous avons préféré travailler avec une paramétrisation plus régulière de ϕ_k plutôt qu'une décomposition suivant des fonctions de base comme nous l'avons fait précédemment. Nous utilisons donc une forme dépendant à chaque instant de deux paramètres A_k et β_k

$$\phi_k(x) = \frac{1}{2} \left(1 + [\tanh |A_k \mathcal{M}_k|]^{\beta_k} \cdot \text{sign}(\mathcal{M}_k) \right)$$

avec une moneyness \mathcal{M}_k donnée par :

$$\mathcal{M}_k = \frac{x - Ke^{-r(T-t_k)}}{\sigma \sqrt{T-t_k}}.$$

En faisant varier les deux paramètres A_k et β_k , nous pouvons, à chaque étape, minimiser la mesure de risque choisie. En usant de la même procédure d'optimisation que précédemment, nous déterminons les paramètres A_k and β_k , et donc la stratégie optimale ϕ_k^* . Pour trouver le

prix de l'option il nous reste à résoudre le problème aux moindres carrés :

$$\min_{\gamma} \sum_{\ell=1}^{N_{MC}} \left[\sum_{a=1}^p \gamma_a^k C_a^k(x_k^\ell) - e^{-\rho} \left(C_{k+1}(x_{k+1}^\ell) - \phi_k(x_k^\ell)(x_{k+1}^\ell - e^{\rho} x_k^\ell) + \beta x_k^\ell |x_k^\ell - x_{k-1}^\ell| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_k^\ell) \right) \right]^2$$

Nous avons testé cet algorithme dans le cas d'un marché gaussien avec les mêmes caractéristiques que précédemment et pour différentes valeurs du paramètre β . Nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus en suivant une stratégie naïve de Black-Scholes et une approche plus évoluée due à Leland [Lel85]. Par des arguments assez proches de notre approximation de $\Delta\phi$ par $\frac{\partial \phi}{\partial x}|\Delta x|$, ce dernier a montré qu'il est possible de modifier légèrement la stratégie de Black-Scholes pour tenir compte des frais de transaction. En effet en utilisant la volatilité

$$\sigma_L = \sigma \sqrt{1 + 2\beta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t}}},$$

au lieu de la vraie volatilité, nous obtenons une stratégie qui, en moyenne, permet de couvrir les coûts supplémentaires occasionnés par les frais de transaction. Comme $\sigma_L > \sigma$, le prix de l'option est bien sûr plus élevé dans le modèle de Leland que dans celui de Black-Scholes. La figure 4.14 compare les stratégies optimales obtenues par notre méthode, et pour deux valeurs du seuil Δ_0 , avec celles de Black-Scholes et de Leland. Comme on s'y attend, les stratégies trouvées sont proches de celle de Leland et varient beaucoup moins que celle de Black-Scholes (d'où une diminution des frais).

Les Tables 4.9, 4.10, 4.11 and 4.12 donnent un résumé de nos résultats. Notons que même dans un marché log-normal, nous parvenons à significativement sur-performer la méthode de Leland en conservant à la fois un prix d'option moins élevé et une diminution de l'occurrence de grosses pertes, mesurées par la VaR et l'expected shortfall (comparer notamment les tables 4.10 et 4.12)

4.5 Conclusion

Nous avons considérablement étendu les travaux de [PBS01] en proposant une méthode numérique générale, basée sur l'utilisation de simulations Monte Carlo, pour la valorisation et la couverture d'options lorsque le marché est incomplet. Le critère de risque à utiliser peut être choisi arbitrairement (ici nous avons pris l'expected shortfall) et notre algorithme peut également traiter le cas de frais de transaction.

En présence de queues de distribution épaisses, notre stratégie réduit les risques extrêmes et conduit à une couverture beaucoup plus plate, qui présente un gamma plus faible, situation particulièrement intéressante en cas de coûts de transaction. Nous avons illustré notre méthode avec la couverture d'options européennes, mais il est possible de l'étendre à des options plus exotiques ou à des paniers d'options. Dans ce dernier cas, il est probable que notre stratégie conduise à des couvertures non linéaires par rapport à la composition du panier géré. Toutefois, pour appliquer notre méthode dans ces cas plus complexes, il sera sans doute nécessaire de

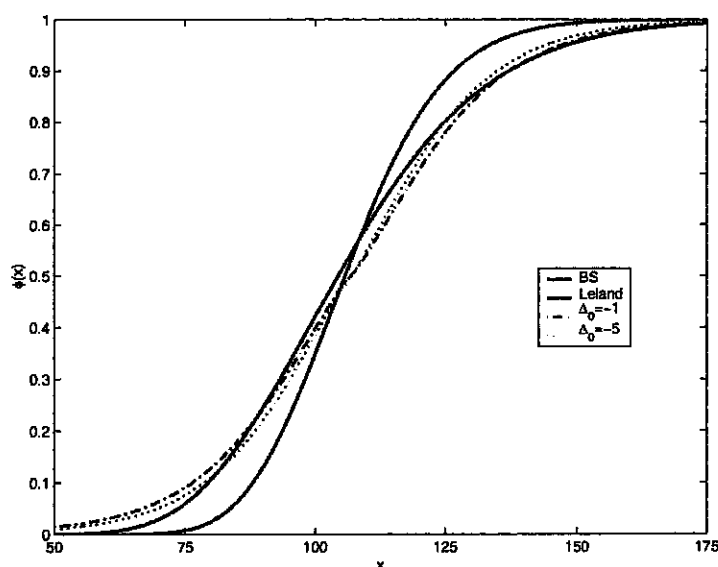


FIG. 4.14: Quantité optimale ϕ d'actif risqué dans le portefeuille de couverture en fonction du cours x de l'actif, dans le cas d'un marché log-normal imparfait (présence de coûts de transaction) et pour différentes stratégies. Notre stratégie s'approche de celle de Leland, très éloignée, elle, de celle de Black-Scholes. Le prix d'exercice est ici fixé à $K = 110$ et les courbes sont tracées à mi-maturité : $k = N/2$.

	β		
	0.005	0.01	0.05
prix de l'option	5.29	5.29	5.29
moyenne de la richesse finale	-0.41	-0.90	-4.78
écart-type de la richesse finale	2.38	2.45	3.28
VaR 0.1%	-10.95	-11.86	-19.91
ESF 0.1%	-1.45	-1.47	-1.33
VaR 1%	-7.32	-8.06	-14.83
ESF 1%	-1.57	-1.67	-2.07
VaR 5%	-4.47	-5.15	-11.14
ESF 5%	-1.75	-1.84	-2.25

TAB. 4.9: Impact des coûts de transaction sur la stratégie de Black-Scholes.

trouver une paramétrisation plus souple de la fonction de couverture.

D'un aspect plus théorique mais néanmoins capitale en pratique, l'étude de la convergence de notre algorithme en fonction de la paramétrisation retenue et de la discrétisation temporelle est également un projet que nous envisageons.

	β		
	0.005	0.01	0.05
prix de l'option	5.69	6.08	9.27
moyenne de la richesse finale	0.10	0.13	0.32
écart-type de la richesse finale	2.39	2.44	2.98
VaR 0.1%	-9.83	-9.79	-10.32
ESF 0.1%	-1.54	-1.53	-1.28
VaR 1%	-6.47	-6.47	-6.83
ESF 1%	-1.55	-1.54	-1.60
VaR 5%	-3.80	-3.84	-4.27
ESF 5%	-1.67	-1.64	-1.62

TAB. 4.10: Impact des coûts de transaction sur la stratégie de Leland.

	β		
	0.005	0.01	0.05
prix de l'option	5.77	6.22	8.30
moyenne de la richesse finale	0.00	-0.04	-0.26
écart-type de la richesse finale	2.39	2.44	3.09
VaR 0.1%	-11.05	-10.95	-10.87
ESF 0.1%	-1.34	-1.45	-1.27
VaR 1%	-7.05	-7.13	-7.54
ESF 1%	-1.61	-1.54	-1.45
VaR 5%	-4.01	-4.11	-5.09
ESF 5%	-1.84	-1.80	-1.51

TAB. 4.11: Impact des coûts de transaction sur notre stratégie ($\Delta_0 = -1$) qui prend en compte ces imperfections.

	β		
	0.005	0.01	0.05
prix de l'option	5.63	5.99	8.44
moyenne de la richesse finale	0.00	-0.05	-0.75
écart-type de la richesse finale	2.66	2.74	3.39
VaR 0.1%	-8.92	-9.17	-11.95
ESF 0.1%	-1.17	-1.27	-1.44
VaR 1%	-6.12	-6.37	-8.60
ESF 1%	-1.28	-1.31	-1.48
VaR 5%	-4.06	-4.25	-6.07
ESF 5%	-1.30	-1.33	-1.56

TAB. 4.12: Impact des coûts de transaction sur notre stratégie ($\Delta_0 = -5$) qui prend en compte ces imperfections.

Conclusion

Les propriétés statistiques complexes des séries financières (décorrélation des rendements mais forte dépendance des volatilités, distribution large à petites échelles, persistance anormale de cette leptokurtocité avec une lente convergence vers la gaussienne, asymétries, etc) conduisent à la nécessité d'une modélisation de plus en plus évoluée des rendements, avec l'utilisation d'une classe sans cesse grandissante de processus ARCH, de processus à volatilité stochastique ou encore de mouvements de Lévy.

Plus récemment a été proposée l'utilisation d'une autre classe, celle des processus multifractals. Ces derniers, développés initialement pour le traitement statistique de la turbulence, sont également bien adaptés pour la modélisation en finance : ils présentent par exemple des corrélations à longue portée responsables de la non gaussiannité aux petites échelles avec une lente convergence vers la normalité à grandes échelles. Nous avons choisi de les introduire comme généralisation des processus auto-similaires, ce qui a l'intérêt, par rapport à d'autres constructions, de conserver une présentation intuitive et d'en donner une caractérisation très pratique et facilement exploitable.

Les approches en finance se sont limitées pour l'instant à l'utilisation de versions symétriques de ces processus ce qui peut être un handicap pour leur utilisation en pratique. Nous avons donc proposé une extension asymétrique pour prendre en compte les effets observés sur les marchés financiers : skewness négative, corrélation négative entre rendements passés et volatilités futures (effet leverage), effet HARCH. En particulier ce processus se révèle très intéressant pour la valorisation d'options puisqu'il permet d'obtenir des formes variées et réalistes de figures de smile.

Notre étude laisse pourtant beaucoup de questions sans réponse comme autant de sujets de recherches futures. Sur un plan théorique, il serait intéressant de mieux comprendre la structure générale des processus multifractals. Ainsi nous avons présenté deux mouvements multifractals, le MMAR et le MRW, qui, s'ils partagent plusieurs propriétés importantes, ont des constructions très différentes. La question qu'on peut se poser est de savoir s'il existe une forme commune qui les englobe. Les travaux récents de Bacry et Muzy [MB02, BM03] semblent répondre affirmativement à cette question puisqu'ils présentent une construction qui regroupe les deux précédentes. Leur approche, fondée sur une forme de cascade continue, est nettement plus complexe que celle du MRW et en particulier la simulation d'un tel processus est beaucoup plus difficile. D'un point de vue pratique, il est donc intéressant de développer des algorithmes de génération simples et rapides, comme c'est le cas par exemple

pour le processus MRW ou le processus PMM de Calvet et Fisher. Par ailleurs, l'introduction d'asymétrie dans un processus multifractal reste sans doute non triviale. Ainsi dans le cas du SMRW, l'asymétrie disparaît dans la limite continue de notre processus standard, et il est nécessaire d'utiliser un bruit fractionnaire pour que celle-ci persiste. Il est d'ailleurs intéressant de noter qu'une anomalie sensiblement comparable a été remarquée dans les travaux de Bacry et Muzy quant à l'utilisation d'un mouvement fractionnaire [MB02] et il est possible que les deux phénomènes soient, d'une manière encore inconnue, reliés.

Plusieurs quantités méritent également d'être étudiées pour ce type de processus. Nous sommes en particulier extrêmement intéressés par les questions de persistance et de drawdowns, qui trouvent des applications naturelles en finance pour la gestion des risques ou la valorisation d'options complexes, indexées sur des temps d'occupation par exemple.

Enfin, toujours en vue d'une utilisation pratique, il est nécessaire de développer des techniques d'estimation adaptées à ces processus. La question principale est de déterminer des estimateurs des différents paramètres du modèle et d'en étudier les propriétés statistiques comme leur consistance ou leur vitesse de convergence. Le problème est ici rendu extrêmement délicat en raison des fortes corrélations présentes dans ces modèles.

L'utilisation de processus de plus en plus évolués pour la valorisation d'options va de pair avec le développement de stratégies de couverture adaptées. Nous avons proposé une technique qui nous semble intéressante car très générale mais encore susceptible de perfectionnements. Pour déterminer la stratégie de couverture, elle fait appel à une décomposition suivant une base donnée ou à l'optimisation d'une forme paramétrique. Il serait donc intéressant d'étudier plus en détail le choix de cette représentation et son impact sur la précision de l'algorithme. De même, l'influence de la discrétisation temporelle reste à étudier.

Notre méthode peut également être envisagée avec des options plus complexes ou avec des portefeuilles d'options mais elle requiert alors sans doute un choix de base plus général et moins contraignant que le nôtre. De plus, notre algorithme dépend uniquement à un temps donné du cours de l'action et du temps à maturité. On pourrait envisager d'introduire d'autres dépendances, comme par exemple celle à la volatilité actuelle, dans la forme du hedge et d'utiliser d'autres instruments de couverture que simplement l'actif risqué (par exemple des options européennes).

Les intérêts de ces études sont multiples. Ainsi, notre processus multifractal asymétrique pourrait également trouver des applications en turbulence où les deux phénomènes, multifractalité et asymétrie, coexistent. En finance, les débouchés sont encore plus nombreux. La gestion des risques fait de plus en plus appel à des modèles perfectionnés pour mieux contrôler ses positions. Le secteur de l'arbitrage statistique et du trading automatique est également en plein essor et avant tout il exige un modèle, de prix et de gestion, au dessus du lot.

Annexe A

Simulation de variables gaussiennes corrélées

Cet appendice est consacré à la présentation détaillée de la méthode de simulation utilisée pour générer les variables gaussiennes corrélées ω dans la marche aléatoire multifractale. Bien que la méthode soit déjà décrite dans certains ouvrages, il nous a semblé intéressant pour le lecteur de la rappeler brièvement ici. Nous supposons connue une méthode de génération de variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Si ce n'est pas le cas, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [VTP93]. Le problème est donc de trouver une méthode efficace pour, à partir de ces variables indépendantes, générer des variables corrélées. Une première méthode est d'utiliser la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation [LL97, p 154]. Toutefois, si cette méthode est bien adaptée à la simulation de petits échantillons, car facile à mettre en oeuvre, elle l'est beaucoup moins pour de grandes séries, car très lente et gourmande en mémoire. Nous proposons donc un algorithme beaucoup plus rapide, basé sur une transformée de Fourier.

Soit $\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(n-1)$ les autocorrélations souhaitées pour notre série de longueur n . Définissons g_k pour $k = 1, \dots, 2n-2$ comme la transformée de Fourier discrète de la séquence $\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(n-2), \gamma(n-1)\gamma(n-2), \gamma(1)$ soit

$$g_k = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(j-1) e^{i(j-1)\lambda_k} + \sum_{j=n}^{2n-2} \gamma(2n-j-1) e^{i(j-1)\lambda_k}$$

avec

$$\lambda_k = \frac{2\pi(k-1)}{2n-2}$$

Notons que par construction les g_k sont réels et vérifient la relation $g_k = g_{2n-k}$. Grâce à l'algorithme de la transformée de Fourier rapide, ce calcul est extrêmement rapide, même pour de très longues séries. Par ailleurs, en vérifiant que les g_k sont tous positifs, on s'assure que la fonction d'autocorrélation est bien définie positive.

Tirons maintenant 2 séries U_1, \dots, U_n et V_2, \dots, V_{n-1} de variables gaussiennes indépendantes, centrées et de variance unité à l'exception de U_1 et U_n de variance 2. Définissons également

$V_1 = V_n = 0$ et construisons les variables complexes

$$\begin{aligned} Z_k &= U_k + iV_k, & k &= 1, \dots, n \\ Z_k &= U_{2n-k} - iV_{2n-k}, & k &= n+1, \dots, 2n-2 \end{aligned}$$

Pour $j = 1, \dots, n$ considérons la série X_j obtenue par transformée de Fourier

$$X_j = \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{2n-2} \sqrt{g_k} e^{i(j-1)\lambda_k} Z_k$$

Il est alors facile de voir que cette série a la structure de corrélation souhaitée. Il suffit pour cela de vérifier que

$$E(X_t X_u) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{2n-2} g_k e^{i(t-u)\lambda_k}$$

qui est égal à $\gamma(t-u)$ en reconnaissant à nouveau une transformée de Fourier.

Grâce à la transformée de Fourier rapide, cette méthode reste très rapide et précise numériquement. Elle permet en toute généralité la simulation de longues séries de variables gaussiennes corrélées selon la structure souhaitée.

Annexe B

Mesure de Hausdorff

Cet appendice rappelle brièvement la définition de la mesure de Hausdorff qui est utilisée dans le cadre de l'analyse multifractale. Nous renvoyons à l'ouvrage [Fal90] pour plus de détails.

Soit un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. Pour tout $\epsilon > 0$, on appelle \mathcal{R}_ϵ l'ensemble des recouvrements de A par des ensembles de diamètre au plus ϵ et on note

$$M(\epsilon, d) = \inf_{r \in \mathcal{R}_\epsilon} \sum_{A_i \in r} (\text{diam } A_i)^d$$

La mesure de Hausdorff d -dimensionnelle de A est par définition la quantité

$$\text{mes}_d(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} M(\epsilon, d)$$

Cette mesure prend les valeurs $+\infty$ ou 0 sauf pour au plus une valeur de d et on appelle mesure de Hausdorff de A cette quantité

$$\dim A = \sup\{d : \text{mes}_d(A) = +\infty\} = \inf\{d : \text{mes}_d(A) = 0\}$$

Annexe C

Calcul des moments d'ordre supérieur du SMRW

Dans cet appendice nous détaillons le calcul des moments d'un processus SMRW $X(t)$ pour des ordres élevés.

Nous commençons par le cas des moments impairs. Les idées et approximations utilisées sont les mêmes que dans le cas du troisième moment, elles sont simplement un peu plus compliquées à écrire. Le calcul du moment d'ordre $2p + 1$ de $X(t)$ fait intervenir des termes de la forme

$$\sum_{0 \leq i_1, \dots, i_q < n} E \left(\epsilon[i_1]^{\gamma_1} \dots \epsilon[i_q]^{\gamma_q} e^{\gamma_1 \tilde{\omega}[i_1] + \dots + \gamma_q \tilde{\omega}[i_q]} \right)$$

avec

$$\begin{aligned} i_1 &< i_2 < \dots < i_{q-1} < i_q \\ \gamma_i &\in \mathbb{N}^* \\ \sum_{i=1}^q \gamma_i &= 2p + 1 \end{aligned}$$

En écrivant explicitement ce que vaut $\tilde{\omega}[i]$ ces termes deviennent

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_q < n} E \left(\epsilon[i_1]^{\gamma_1} e^{\mathcal{K}_1 \epsilon[i_1]} \right) \dots E \left(\epsilon[i_q]^{\gamma_q} e^{\mathcal{K}_q \epsilon[i_q]} \right) E \left(e^{\gamma_1 \omega[i_1] + \dots + \gamma_q \omega[i_q]} \right) \cdot \\ \prod_{-\infty < i < i_q, i \neq i_1, \dots, i_q} E \left(e^{\mathcal{K}_i \epsilon[i]} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Les termes exponentiels $\epsilon[i]^{\gamma_i} e^{\mathcal{K}_i \epsilon[i]}$ proviennent de la définition des $\tilde{\omega}_i$ et les \mathcal{K}_i sont des combinaisons linéaires de différentes fonctions $K(i, j)$ pondérées par les variables γ_j . L'expression précédente peut sembler au premier abord très complexe mais, comme nous cherchons le comportement du terme dominant, il est possible de la simplifier en utilisant à nouveau les hypothèses (3.1). En particulier, au premier ordre, nous avons

$$E \left(e^{\mathcal{K}_i \epsilon[i]} \right) \simeq 1$$

ainsi que

$$\begin{aligned} E\left(\epsilon[i]^{\gamma_i} e^{\mathcal{K}_i \epsilon[i]}\right) &\simeq E\left(\epsilon[i]^{\gamma_i} (1 + \mathcal{K}_i \epsilon[i] + \dots)\right) \\ &\simeq \begin{cases} E(\epsilon[i]^{\gamma_i}) \sim \Delta t^{\gamma_i/2} & \text{si } \gamma_i \text{ est pair} \\ \mathcal{K}_i E(\epsilon[i]^{1+\gamma_i}) \sim K_0 \Delta t^{\alpha-\beta+(1+\gamma_i)/2} & \text{si } \gamma_i \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que le premier ordre en K_0 est atteint lorsqu'un maximum de γ_i sont pairs. Autrement dit, puisque nous nous intéressons au cas d'un moment impair, tous les γ_i sont pairs à l'exception d'un.

Enfin, les propriétés élémentaires des vecteurs gaussiens nous donnent

$$E\left(e^{\gamma_1 \omega[i_1] + \dots + \gamma_q \omega[i_q]}\right) = \prod_{1 \leq k < \ell \leq q} \left(\frac{T}{(1 + |i_k - i_\ell|) \Delta t}\right)^{\gamma_k \gamma_\ell \lambda^2} \cdot \left(\frac{T}{\Delta t}\right)^{\lambda^2 (\frac{1}{2} \sum \gamma_i^2 - \sum \gamma_i)}$$

La question est maintenant de déterminer la combinaison de $\{\gamma_i\}$ qui conduit au terme dominant. Une façon d'aborder ce problème est d'étudier le comportement en Δt pour un choix donné de $\{\gamma_i\}$. En réunissant les calculs précédents et en utilisant l'égalité $\sum_{i=1}^q \gamma_i = 2p + 1$, nous voyons que l'exposant de Δt s'écrit

$$\begin{aligned} &\sum_{\gamma_i \text{ pairs}} \frac{\gamma_i}{2} + 1 + (\alpha - \beta) - \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \sum_i \gamma_i^2 - \sum_i \gamma_i \right) - q \\ &= 1 + \lambda^2 + (\alpha - \beta) + p(1 + 2\lambda^2) - q - \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^q \gamma_i^2 \end{aligned}$$

Dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$, seul l'exposant le plus faible va contribuer. Or les seuls paramètres que nous pouvons ajuster dans l'expression précédente sont q (c'est à dire le nombre de γ_i) et $\sum_{i=1}^q \gamma_i^2$, sous la contrainte que les γ_i sont tous pairs à l'exception d'un et qu'ils doivent vérifier $\sum_{i=1}^q \gamma_i = 2p + 1$.

Il est facile de se convaincre que les deux extrêmes sont atteints pour

- $q = 2$, $\gamma_{i_1} = 2p$, $\gamma_{i_2} = 1$, qui conduit à un exposant

$$\mu_2 = (\alpha - \beta) + \frac{\lambda^2}{2} + (p - 1)(1 - 2p\lambda^2).$$

- $q = p + 1$, $\gamma_{i_1} = \dots = \gamma_{i_p} = 2$, $\gamma_{i_{p+1}} = 1$, qui correspond à un exposant

$$\mu_{p+1} = (\alpha - \beta) + \frac{\lambda^2}{2}.$$

La différence $\mu_2 - \mu_{p+1} = (p - 1)(1 - 2p\lambda^2)$ est positive dès que $p < p^* = \frac{1}{2\lambda^2}$. Ainsi, nous pouvons conclure que les $2p^* + 1$ premiers moments impairs voient leur comportement dominé par un terme unique, obtenu en appariant tous les points entre eux à l'exception d'un seul. La loi d'échelle en t se déduit en étudiant le comportement de C.1 à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ qui fait alors intervenir une intégrale du type

$$\int_{u_1=0}^t \dots \int_{u_{p+1}=0}^t \mathcal{K}(u_m) \prod_{1 \leq k < \ell < p+1} \left(\frac{T}{|u_k - u_\ell|}\right)^{\gamma_k \gamma_\ell \lambda^2} du_1 \dots du_{p+1}$$

où u_m correspond au seul terme non apparié. En utilisant le fait que tous les γ_i valent deux à l'exception de γ_m qui vaut 1, un simple calcul montre que cette intégrale se comporte selon t comme une loi puissance d'exposant

$$\begin{aligned}\zeta_{2p+1} &= p+1 - 4\lambda^2 \frac{p(p-1)}{2} - 2\lambda^2 p - \alpha \\ &= p+1 - 2p^2\lambda^2 - \alpha\end{aligned}\tag{C.2}$$

La même discussion conduit à un résultat similaire pour les moments pairs : le terme dominant est encore celui pour lequel les variables sont groupées deux à deux et dans ce cas l'exposant d'échelle trouvé pour le moment d'ordre $2p$ s'écrit

$$\zeta_{2p} = p - 2p(p-1)\lambda^2\tag{C.3}$$

Les arguments précédents sont encore plus clairs dans le cas du processus MRW pour lequel les calculs sont plus faciles et peuvent être menés sans approximation. Dans ce modèle, les moments impairs sont tous nuls et, en suivant le même raisonnement que précédemment, on trouve que les moments pairs d'ordre $2p$ ont un comportement en Δt gouverné par l'exposant

$$p(1 + 2\lambda^2) - q - \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^q \gamma_i^2$$

Si $q = p$ et $\gamma_i = 2$ (c'est à dire des variables toutes appariées), nous voyons immédiatement que cet exposant est nul ce qui est la condition pour une limite continue non triviale. En revanche si $q = 1$ et $\gamma_i = 2p$ (c'est à dire une seule variable), l'exposant vaut $(p-1)(1-2p\lambda^2)$ qui est négatif dès que $p > p^* = \frac{1}{2\lambda^2}$ qui est le seuil de divergence des moments de ce modèle.

Annexe D

Utilisation d'un mouvement brownien fractionnaire

D.1 H -MRW

Il est suggéré, mais non détaillé, dans [BDM01b] qu'il est possible de considérer la construction du processus MRW en utilisant pour les variables ϵ un bruit gaussien fractionnaire plutôt qu'un bruit gaussien standard. Il est alors possible d'obtenir un processus multifractal, dont les incréments sont corrélés. Notons que du point de vue des applications en finance, un tel processus présente moins d'intérêt puisque nous avons vu que les rendements sont décorrélés (sauf sur certains marché peu liquides et très risqués comme ceux des zones émergentes). Les calculs qui suivent présentent des similitudes avec ceux du cas standard. Nous renvoyons le lecteur à ces derniers pour les détails et nous nous efforcerons ici de mettre l'accent sur les différences essentielles.

D.1.1 Modèle

Nous considérons donc le processus discr  t  s   $X_H(t)$ (nous omettrons l'indice Δt pour simplifier l'écriture) dont les incréments sont donnés par

$$\delta X_H[k] = \epsilon_H[k] e^{\omega[k]}$$

Les variables $\omega[k]$ ont la même structure de covariance que dans le cas standard mais leur moyenne n'est plus la même avec l'apparition d'un facteur $1/2$ dont nous verrons plus loin l'utilité et $\epsilon_H[k]$ est maintenant un bruit gaussien fractionnaire

$$\begin{aligned} E(\omega[k]) &= -Var(\omega[k]) / 2 \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} \ln \frac{T}{\Delta t} \\ Cov(\epsilon_H[k] \epsilon_H[\ell]) &= (|k - \ell| \Delta t + \Delta t)^{2H} + (|k - \ell| \Delta t - \Delta t)^{2H} - 2(|k - \ell| \Delta t)^{2H} \\ &\simeq \frac{2H(2H - 1)}{|k - \ell|^{2-2H}} \Delta t^{2H} \end{aligned}$$

La dernière approximation est vraie pour $H \neq 1/2$ et dans la limite $|k - \ell|$ grand.

D.1.2 Loïs d'échelle

Le moment d'ordre q de ce processus s'écrit

$$E[X_H(t)]^q = \sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \cdots \sum_{i_q=0}^{t/\Delta t} E[\epsilon_H(i_1) \dots \epsilon_H(i_q)] E[e^{\omega(i_1)+\dots+\omega(i_q)}]$$

Le théorème de Wick va nous permettre de calculer facilement ce moment. Il implique en particulier que les moments impairs du processus restent nuls. Les moments pairs, d'ordre $2p$, s'écrivent eux

$$\begin{aligned} E[X(t)]^{2p} &= \sum_{\text{paires } i_1=0}^{t/\Delta t} \cdots \sum_{i_{2p}=0}^{t/\Delta t} E[\epsilon_H(i_1)\epsilon_H(i_2)] \dots E[\epsilon_H(i_{2p-1})\epsilon_H(i_{2p})] E[e^{\omega(i_1)+\dots+\omega(i_{2p})}] \\ &\simeq [2H(2H-1)]^p \frac{(2p)!}{2^p p!} \sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \cdots \sum_{i_{2p}=0}^{t/\Delta t} \frac{\Delta t^2}{(|i_1-i_2|\Delta t)^{2-2H}} \cdots \frac{\Delta t^2}{(|i_{2p-1}-i_{2p}|\Delta t)^{2-2H}} \cdot \\ &\quad \prod_{(k<l) \in (i_1, \dots, i_{2p})} \left(\frac{T}{(|k-l|+1)\Delta t} \right)^{\lambda^2} \end{aligned}$$

Comme dans le cas standard, le choix de la moyenne de ω permet de ne conserver que les termes de covariance provenant de l'exponentielle. Lorsque Δt tend vers 0, il est facile de voir que le terme précédent converge vers une intégrale dont le comportement selon t est dirigé par l'exposant

$$\begin{aligned} \zeta_H(2p) &= 2p - (2-2H)p - \lambda^2 2p(2p-1)/2 \\ &= 2Hp - \lambda^2 p(2p-1) \end{aligned}$$

Le mouvement H -MRW ainsi construit présente donc un exposant d'échelle

$$\zeta_H(q) = qH - \lambda^2 q(q-1)/2$$

qui est bien l'expression annoncée dans [BDM01b]. Notons que l'hypothèse implicite du calcul précédent, selon laquelle $H \neq 1/2$, conduit à une structure radicalement différente puisque les termes qui contribuent ne sont plus nécessairement appariés comme dans le cas standard. En particulier, si l'on prend $H = 1/2$ dans l'expression précédente on ne retrouve pas l'exposant d'échelle standard.

D.2 H-SMRW

D.2.1 Modèle

Les variables ϵ et ω ont les mêmes caractéristiques que dans le cas symétrique et nous utilisons une fonction d'asymétrie

$$K(i, j) = \frac{K_0}{(j-i)^\alpha \Delta t^\alpha} \quad (j > i)$$

Par rapport au cas standard on choisit donc $\beta = \alpha$.

D.2.2 Lois d'échelle

Moments impairs Le moment d'ordre $2p + 1$ s'écrit sous la forme

$$E[X(t)]^{2p+1} = \sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \cdots \sum_{i_{2p+1}=0}^{t/\Delta t} E \left[\epsilon_H(i_1) \cdots \epsilon_H(i_{2p}) \sum_{j < i_{2p}} e^{\mathcal{K}(j)\epsilon_H(j)} \right] E \left[e^{\omega(i_1) + \cdots + \omega(i_{2p+1})} \right]$$

où la fonction $K(j)$ est une combinaison des différents noyaux $K(i, j)$ avec $i < j$. Le point essentiel est que cette fonction, comme les différents noyaux qui la composent, possède encore une loi d'échelle d'exposant $-\alpha$.

Au premier ordre, nous avons

$$e^{\mathcal{K}(j)\epsilon_H(j)} \simeq 1 + \mathcal{K}(j)\epsilon_H(j)$$

d'où, les termes d'ordre impair étant nuls,

$$\begin{aligned} E[X(t)]^{2p+1} &\simeq \sum_j \sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \cdots \sum_{i_{2p+1}=0}^{t/\Delta t} \mathcal{K}(j) E[\epsilon_H(i_1) \cdots \epsilon_H(i_{2p}) \epsilon_H(j)] E[e^{\omega(i_1) + \cdots + \omega(i_{2p+1})}] \\ &\simeq [2H(2H-1)]^{p+1} \frac{(2p+2)!}{2^{p+1}(p+1)!} \\ &\quad \sum_j \sum_{i_1=0}^{t/\Delta t} \cdots \sum_{i_{2p+1}=0}^{t/\Delta t} \mathcal{K}(j) \frac{\Delta t^2}{(|i_1 - i_2|\Delta t)^{2-2H}} \cdots \frac{\Delta t^2}{(|i_{2p+1} - j|\Delta t)^{2-2H}} \\ &\quad \prod_{(k < l) \in (i_1, \dots, i_{2p+1})} \left(\frac{T}{(|k - l| + 1)\Delta t} \right)^{\lambda^2} \end{aligned}$$

Comme précédemment, lorsque Δt tend vers 0, il est facile de voir que ce terme converge vers une intégrale dont le comportement selon t est dirigé par l'exposant

$$\begin{aligned} \zeta_H(2p+1) &= 2(p+1) - \alpha - (2-2H)(p+1) - \lambda^2 2p(2p+1)/2 \\ &= 2H(p+1) - \alpha - \lambda^2 p(2p+1) \end{aligned}$$

Par ailleurs le choix $\alpha = \beta$ garantit le bon exposant en Δt , c'est à dire égal au nombre de variables libres dans l'intégrale, et donc les moments d'ordre impair ne s'annulent plus lorsque Δt tend vers 0.

D.2.3 Moments pairs

Le même raisonnement que précédemment montre que l'on retrouve la loi d'échelle du cas symétrique, c'est à dire

$$\zeta_H(2p) = 2Hp - \lambda^2 p(2p-1)$$

D.3 Conclusion

L'utilisation d'un bruit brownien fractionnaire permet donc d'obtenir un nouveau mouvement multifractal, qu'on pourrait appeler H -MRW, qui présente des incréments corrélés et surtout une loi d'échelle différente du mouvement MRW standard. En particulier la limite $H = 1/2$ ne correspond pas au cas standard.

Ceci est encore plus flagrant dans la construction du processus H -SMRW qui présente lui aussi une loi d'échelle différente du cas standard et surtout une limite continue qui conserve son asymétrie.

Ces différences de comportement sont relativement intrigantes et mériteraient sans doute d'être approfondies. Notons d'ailleurs que le même type d'anomalie a été rencontré dans [MB02] où deux constructions très proches, utilisant chacune un mouvement brownien fractionnaire sont proposées et ne conduisent pas au même processus.

Bibliographie

- [ABH⁺00] E. Aurell, R. Baviera, O. Hammarlid, M. Serva, and A. Vulpiani. A general methodology to price and hedge derivatives in incomplete markets. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(1) :1–24, 2000.
- [ABM98] A. Arneodo, E. Bacry, and J.F. Muzy. Random cascades on wavelet dyadic trees. *Journal of Mathematical Physics*, 39 :4124–4164, 1998.
- [ADEH99] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9 :203–228, 1999.
- [AG00] T. Ané and H. Geman. Order flow, transaction clock and normality of asset returns. *Journal of Finance*, 55 :2259–2284, 2000.
- [AMS98] A. Arneodo, J.-F. Muzy, and D. Sornette. "Direct" causal cascade in the stock market. *European Physical Journal B*, 2(2) :277–282, 1998.
- [Bac00] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 17 :21–86, 1900.
- [BBG97] P. Boyle, M. Broadie, and P. Glasserman. Monte carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8-9) :1267–1321, 1997.
- [BBM96] R.T. Baillie, T. Bollerslev, and H.O. Mikkelsen. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 74 :3–30, 1996.
- [BDM01a] E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy. Modelling financial time series using multifractal random walks. *Physica A*, 299 :84, 2001.
- [BDM01b] E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy. A multifractal random walk. *Physical Review E*, 64, 2001.
- [BDN⁺00] E. Bouye, V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet, and T. Roncalli. Copulas for finance : a reading guide and some applications. Technical report, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, 2000.
- [Ber94] J. Beran. *Statistics for long-memory processes*. Chapman & Hall, 1994.
- [Ber96] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [BFLW] D. Backus, S. Foresi, K. Lai, and L. Wu. Accounting for biases in Black-Scholes. Working paper of NYU Stern School of Business, 1997.
- [BG74] R. Blattberg and N. Gonnedes. A comparison of stable and Student distribution as statistical models for stock prices. *Journal of Business*, 47 :244–280, 1974.

- [BK98] M. Borkovec and C. Klüppelberg. Extremal behaviour of diffusion models in finance. *Extremes*, 1 :47–80, 1998.
- [Bla76] F. Black. Studies of stock price volatility changes. In *American Statistical Association, Business and Economical Statistics Section*, 1976.
- [BM02] J. Barral and B.B. Mandelbrot. Multifractal products of cylindrical pulses. *Probability Theory and Related Fields*, 124(3) :409–430, 2002.
- [BM03] E. Bacry and J.F. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Communications in Mathematical Physics*, 236 :449–475, 2003.
- [BMP01] J.P. Bouchaud, Andrew Matacz, and M. Potters. Leverage effect in financial markets : the retarded volatility model. *Physical Review Letters*, 87(22), 2001.
- [BN98] O.E. Barndorff-Nielsen. Processes of normal inverse gaussian type. *Finance and Stochastics*, 2 :41–68, 1998.
- [BNP00] O.E. Barndorff-Nielsen and K. Prause. Apparent scaling. *Finance and Stochastics*, 5(5) :103–113, 2000.
- [BNS01] O.E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard. Non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of Royal Statistical Society*, 63 :167–241, 2001.
- [Boc55] S. Bochner. *Harmonic analysis and the theory of probability*. University of California Press, 1955.
- [Bol86] T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 :307–327, 1986.
- [Bor02] L. Borland. A theory of non-gaussian option pricing. *Quantitative Finance*, 2(6) :415–431, 2002.
- [BP92] P. Bougerol and N. Picard. Stationnarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. *Journal of Econometrics*, 74 :3–30, 1992.
- [BP00] J.-P. Bouchaud and M. Potters. *Theory of financial risks*. Cambridge University Press, 2000.
- [BPM00] J.P. Bouchaud, M. Potters, and M. Meyer. Apparent multifractality in financial time series. *European Physical Journal B* 595-599 (2000), 13 :595–599, 2000.
- [BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–654, 1973.
- [BS94] J.P. Bouchaud and D. Sornette. The Black-Scholes option pricing problem in mathematical finance : generalization and extensions for a large class of stochastic processes. *Journal de Physique I*, 4 :863–881, 1994.
- [BW00] G. Bekaert and G. Wu. Asymmetric volatility and risk in equity markets. *The Review of Financial Studies*, 13 :1–42, 2000.
- [CF01] L. Calvet and A. Fisher. Forecasting multifractal volatility. *Journal of Econometrics*, 105 :27–58, 2001.
- [CF02] L. Calvet and A. Fisher. Multifractality in asset returns : theory and evidence. *Review of Economics and Statistics*, 84 :381, 2002.

- [CFM97] L. Calvet, A. Fischer, and B. Mandelbrot. Large deviation theory and the distribution of price changes. Cowles Foundation Discussion Paper #1165, 1997.
- [CGMY03] P. Carr, H. Geman, D. Madan, and M. Yor. Stochastic volatility for Lévy processes. *Mathematical Finance*, 13(3) :345–382, 2003.
- [CJL78] M. Cassandro and Jona-Lasinio. Critical point behaviour and probability theory. *Advances in Physics*, 27(6) :913–941, 1978.
- [Cla73] P.K. Clark. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, 41 :135–156, 1973.
- [CLD01] D. Carpentier and P. Le Doussal. Glass transition of a particle in a random potential, front selection in non linear renormalization group, and entropic phenomena in liouville and sinh-gordon models. *Physical Review E*, 63(2) :026110, 2001.
- [Con01] R. Cont. Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2) :223, 2001.
- [CPB97] R. Cont, M. Potters, and J.P. Bouchaud. Scaling in stock market data : stable laws and beyond. In *Scale invariance and beyond*, 1997.
- [CR96] F. Comte and E. Renault. Long memory continuous time models. *Journal of Econometrics*, 73 :101–149, 1996.
- [CRA02] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. Infinitely divisible cascades. 2002.
- [CS97] C.J. Corrado and T. Su. Implied volatility skews and stock index skewness and kurtosis implied by S&P 500 index option prices. *The Journal of Derivatives*, pages 8–19, 1997.
- [Dau92] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [DC96] Z. Ding and Granger C.W.J. Modeling volatility persistence of speculative returns : a new approach. *Journal of Econometrics*, 73 :185–215, 1996.
- [Dev87] L. Devroye. *A Course In Density Estimation*. Birkhäuser Verlag, 1987.
- [DGE93] Z. Ding, C. Granger, and R.F. Engle. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1 :83–106, 1993.
- [DGM⁺01] M.M. Dacorogna, R. Gençay, U.A. Müller, R.B. Olsen, and Pictet O.V. *An Introduction to High-Frequency Finance*. Academic Press, 2001.
- [DL83] R. Durrett and T.M. Liggett. Fixed points of the smoothing transformation. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 64 :275–301, 1983.
- [DLC94] P. De Lima and N. Crato. Long range dependence in the conditional variance of stock returns. *Economic Letters*, 45 :281–285, 1994.
- [DM79] R.L. Dobrushin and P. Major. Non-central limit theorems for non linear functionals of gaussian fields. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 50 :27–52, 1979.
- [DM98] R.A. Davis and T. Mikosch. The sample autocorrelations for heavy-tailed processes with applications to arch. *Annals of Statistics*, 26 :2049–2080, 1998.

- [Dob80] R.L. Dobrushin. *Multicomponent random systems*, chapter Automodel generalized random fields and their renormalization group, pages 153–198. Dekker, 1980.
- [DS94] F. Delbaen and W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300 :463–520, 1994.
- [DY02] A.A. Dragulescu and V.M. Yakovenko. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. *Quantitative Finance*, 2 :443–453, 2002.
- [EB86] R.F. Engle and T. Bollerslev. Modelling the persistence of conditional variances. with comments and a reply by the authors. *Econometric Review*, 5 :1–87, 1986.
- [EKP98] E. Eberlein, U. Keller, and K. Prause. New insights into smile, mispricing and value at risk : the hyperbolic model. *Journal of Business*, 71 :371–406, 1998.
- [EM00] P. Embrechts and M. Maejima. An introduction to the theory of selfsimilar stochastic processes. *International Journal of Modern Physics B*, 14 :1399–1420, 2000.
- [Eng82] R.F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedastic models with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50 :987–1007, 1982.
- [ESDM96] P. Embrechts, G. Samorodnitsky, M.M. Dacorogna, and U.A. Müller. How heavy are the tails of a stationary HARCH(k) process? a study of the moments. preprint, O&A Research Group, 1996.
- [Eve95] C. Evertsz. Fractal geometry of financial time series. *Fractals*, 3(3) :609–616, 1995.
- [Fal90] K. Falconer. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 1990.
- [FCM97] A. Fischer, L. Calvet, and B. Mandelbrot. Multifractality of Deutschmark/US dollar exchange rates. Cowles Foundation Discussion Paper #1166, 1997.
- [Fel68] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications, Volume 1*. Wiley, 1968.
- [Fel71] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications, Volume 2*. Wiley, 1971.
- [FH65] R.P. Feynman and A.R. Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill, 1965.
- [FH98] M. Fridman and L. Harris. A maximum likelihood approach for non-gaussian stochastic volatility models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 16 :284–291, 1998.
- [FL99] H. Follmer and P. Leukert. Quantile hedging. *Finance and Stochastics*, 3(3) :251–273, 1999.
- [FL00] H. Follmer and P. Leukert. Efficient hedges : cost versus shortfall risk. *Finance and Stochastics*, 4 :117–146, 2000.
- [Fol02] H. Follmer. *Stochastic Finance : an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter, 2002.

- [FP83] U. Frisch and G. Parisi. Fully developed turbulence and intermittency. In *International school on turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, 1983.
- [FPS00] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, and K.R. Sircar. *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press, 2000.
- [Fri95] U. Frisch. *Turbulence. The legacy of A.Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [FS91] H. Föllmer and M. Schweizer. *Applied Stochastic Analysis*, chapter Hedging of contingent claims under incomplete information, pages 389–414. Gordon and Breach, 1991.
- [GB03] I. Giardina and J.P. Bouchaud. Bubbles, crashes and intermittency in agent based market models. *European Physical Journal B*, 31 :421, 2003.
- [GDD⁺97] D.M. Guillaume, M. Dacorogna, R.D. Davé, U.A. Müller, R.B. Olsen, and O.V. Pictet. From the bird's eye to the microscope : a survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets. *Finance and stochastics*, 1 :95–129, 1997.
- [GHR96] E. Ghysels, A.C. Harvey, and E. Renault. *Statistical Methods in Finance*, volume 14 of *Handbook of Statistics*, chapter Stochastic Volatility, pages 128–198. North-Holland, 1996.
- [GJ80] C.W. Granger and R. Joyeux. An introduction to long memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1 :15–29, 1980.
- [Gol91] C.M. Goldie. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Annals of Applied Probability*, 1 :126–166, 1991.
- [Gol92] N. Goldenfeld. *Lectures on phase transition and the renormalization group*. Westview Press, 1992.
- [GPA⁺99] P. Gopikrishnan, V. Plerou, L.A.N. Amaral, M. Meyer, and H.E. Stanley. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, 60(5) :5305–5316, 1999.
- [GS85] L. Giraitis and D. Surgailis. CLT and other limit theorems for functionals of gaussian processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 70 :191–212, 1985.
- [Gui87] Y. Guivarc'h. Remarques sur les solutions d'une équation fonctionnelle non linéaires de Benoît Mandelbrot. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série I*, 305 :139, 1987.
- [Gui90] Y. Guivarc'h. Sur une extension de la notion de loi semi-stable. *Annales de l'IHP*, 26 :261–285, 1990.
- [HJK⁺86] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, and B.I. Shraiman. Fractal measures and their singularities : the characterization of strange sets. *Physical Review A*, 33(2) :1141–1151, 1986.

- [HK79] J.M. Harrison and D.M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economical Theory*, 20 :381–408, 1979.
- [Hor01] U. Horst. Financial price fluctuations in a stock market model with many interacting agents. *ISE Finance Award Series*, 2 :1–28, 2001.
- [HP81] J.M. Harrison and S.R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and its Applications*, 11 :215–260, 1981.
- [Jae02] P. Jaeckel. *Monte Carlo Methods in Finance*. Wiley, 2002.
- [Jaf97a] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions part i : results valid for all functions. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 28(4) :944–970, 1997.
- [Jaf97b] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions part ii : self-similar functions. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 28(4) :971–998, 1997.
- [Jaf99] S. Jaffard. The multifractal nature of Lévy processes. *Probability Theory and Related Fields*, 114(2) :207–227, 1999.
- [Jar98] R. Jarrow. *Volatility : new estimation techniques for pricing derivatives*. Risk Books, 1998.
- [JL75] G. Jona-Lasinio. The renormalization group : a probabilistic view. *Il Nuovo Cimento B*, 26(1) :99–119, 1975.
- [JR82] R. Jarrow and A. Rudd. Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 10 :347–369, 1982.
- [Kes73] H. Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Mathematica*, 131 :207–248, 1973.
- [Kop95] I. Koponen. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the gaussian stochastic process. *Physical Review E*, 62 :1197–1199, 1995.
- [Kor97] D. Korshunov. On distribution tail of the maximum of a random walk. *Stochastic Processes and their Applications*, 72 :97–103, 1997.
- [KP76] J.P. Kahane and J. Peyrière. Sur certaines martinagales de Benoit Mandelbrot. *Advances in Mathematics*, 22 :131–145, 1976.
- [KS88] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1988.
- [KT02] A. Kirman and G. Teyssière. Microeconomic models for long memory in the volatility of financial time serie. *Studies in nonlinear dynamics and econometrics*, 5 :281–302, 2002.
- [KZKB⁺02] J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H.E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, 316 :87–114, 2002.
- [Lam62] J.W. Lamperti. Semi-stable processes. *Transactions of American mathematical society*, 104 :62–78, 1962.
- [las] <http://www.cmap.polytechnique.fr/bacry/lastwave/index.html>.

- [LCBP99] L. Laloux, P. Cizeau, J.P. Bouchaud, and M. Potters. Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical Review Letters*, 83 :1467, 1999.
- [LCPB99] L. Laloux, P. Cizeau, M. Potters, and J.P. Bouchaud. Random matrix theory. *Risk*, 12 :69, 1999.
- [LeB01] B. LeBaron. Stochastic volatility as a simple generator of apparent financial power laws and long memory. *Quantitative Finance*, 1(6) :621–631, 2001.
- [Lel85] H.E. Leland. Option pricing and replication with transaction costs. *Journal of Finance*, 40 :1283–1301, 1985.
- [Les96] A. Lesne. *Méthodes de renormalisation : phénomènes critiques, chaos, structures fractales*. Eyrolles, 1996.
- [Lin65] J. Lintner. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47 :13–37, 1965.
- [Liu02] Q. Liu. An extension of a functional equation of Poincaré and Mandelbrot. *Asian Journal of Mathematics*, 6(1) :145–168, 2002.
- [LL97] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, 1997.
- [Lo91] A. Lo. Long term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59 :1279, 1991.
- [LS01] F.A. Longstaff and E.S. Schwartz. Valuing american options by simulation : a simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14(4) :113–147, 2001.
- [LTWW94] W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger, and D. Wilson. On the self-similar nature of ethernet traffic. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, pages 1–15, 1994.
- [Lux98] T. Lux. The socio-economic dynamics of speculative markets : interacting agents, chaos, and the fat tails of return distributions. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 33 :143–165, 1998.
- [Lév37] P. Lévy. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, Paris, 2nd edition, 1937.
- [Mal00] S. Mallat. *Une Exploration des Signaux en Ondelettes*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [Man63] B.B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, XXXVI :392–417, 1963.
- [Man74] B.B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62 :331–358, 1974.
- [Man82] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, 1982.
- [Man88] B.B. Mandelbrot. *Fractals and scaling in finance : discontinuity, concentration, risk*. Springer, 1988.
- [Man89] B.B. Mandelbrot. Multifractal measures, especially for geophysicist. *Pure and Applied Geophysics*, 131 :5–42, 1989.

- [Man01] B.B. Mandelbrot. Scaling in financial prices :II. multifractals and the star equation. *Quantitative Finance*, 1 :124–130, 2001.
- [Mar52] H Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7 :77–91, 1952.
- [MAS03] K Matia, Y Ashkenazy, and H.E. Stanley. Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities. *Europhysics Letters*, 61(3) :422–428, 2003.
- [MB02] J.F. Muzy and E. Bacry. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling law. *Physical Review E*, 66, 2002.
- [MBA93] J.F. Muzy, E. Bacry, and A. Arnéodo. Multifractal formalism for fractal signals : the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Physical Review E*, 47(2) :875–884, 1993.
- [MBLM02] S. Miccichè, G. Bonanno, F. Lillo, and R. N Mantegna. Volatility in financial markets : stochastic models and empirical results. *Physica A*, 314 :756–761, 2002.
- [MDB00] J.-F. Muzy, J. Delour, and E. Bacry. Modelling fluctuations of financial time series : from cascade process to stochastic volatility model. *Eur. Phys. J. B*, 17 :537, 2000.
- [MDD⁺95] U.A. Müller, M.M. Dacorogna, R.D. Davé, O.V. Pictet, R.B. Olsen, and J.R. Ward. Fractals and intrinsic time, a challenge to econometricians. preprint, O&A Research Group, 1995.
- [MDD⁺97] U.A. Müller, M.M. Dacorogna, R.B. Davé, R.B. Olsen, O.V. Pictet, and von Weizsäcker. Volatilities of different time resolutions, analysing the dynamics of market components. *Journal of Empirical Finance*, 4 :213–239, 1997.
- [MDO⁺90] U.A. Müller, M.M. Dacorogna, R.B. Olsen, O.V. Pictet, M. Schwarz, and C. Morgenegg. Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intraday analysis. *Journal of Banking and Finance*, 14 :1189–1208, 1990.
- [Meh91] M.L. Mehta. *Random matrices*. Academic Press, 1991.
- [Mer73] Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 :141–183, 1973.
- [MFC97] B. Mandelbrot, A. Fischer, and L. Calvet. A multifractal model of asset returns. Cowles Foundation Discussion Paper #1164, 1997.
- [MR97] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling*. Springer, 1997.
- [MS00a] T. Mikosch and G. Samorodnitsky. The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. *Annals of Applied probability*, 10 :1025–1064, 2000.
- [MS00b] T. Mikosch and Stărică. *Extremes and integrated risk management*, chapter Is it really long memory we see in financial returns?, pages 149–168. Risk Books, 2000.

- [MSL96] D. Marsan, D. Schertzer, and S. Lovejoy. Causal space-time multifractal processes : predictability and forecasting of rain fields. *Journal of Geophysical Research*, 101(21), 1996.
- [MVN68] B.B. Mandelbrot and J.W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10 :422–437, 1968.
- [Nel67] E. Nelson. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967.
- [Nel90] D. B. Nelson. Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*, 6 :318–334, 1990.
- [Nel91] D. B. Nelson. Conditional heteroskedasticity in asset pricing : a new approach. *Econometrica*, 59 :347–370, 1991.
- [Nel99] R.B. Nelsen. *An introduction to copulas*, volume 139 of *Lecture notes in statistics*. Springer, 1999.
- [Off72] R.R. Officer. The distribution of stock returns. *Journal of the american statistical association*, 67 :807–812, 1972.
- [Pag96] A. Pagan. The econometrics of financial markets. *Journal of empirical finance*, 3 :15–102, 1996.
- [PB03] B. Pochart and J.P. Bouchaud. Option pricing and hedging with minimum local expected shortfall. cond-mat/0308570, 2003.
- [PBH⁺94] C.K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49 :1685–1689, 1994.
- [PBS01] M. Potters, J.-P. Bouchaud, and D. Sestovic. Hedged monte-carlo : low variance derivative pricing with objective probabilities. *Physica A*, 289 :517–525, 2001.
- [PCB98] M. Potters, R. Cont, and J.-P. Bouchaud. Financial markets as adaptive systems. *Europhysics letters*, 41(3), 1998.
- [PGA⁺99] V. Plerou, P. Gopikrishnan, L.A.N. Amaral, M. Meyer, and H.E. Stanley. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, 60(6) :6519–6529, 1999.
- [PGR⁺99] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L.A.N. Amaral, and H.E. Stanley. Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series. *Physical Review Letters*, 83 :1471, 1999.
- [Pra72] P.D. Praetz. The distribution of share price changes. *Journal of Business*, 45 :49–55, 1972.
- [PS99] M. Pasquini and M. Serva. Multiscaling and clustering of volatility. *Physica A*, 269 :140–147, 1999.
- [PS00] M. Pasquini and M. Serva. Clustering of volatility as a multiscale phenomenon. *The European Physical Journal B*, 16 :195–201, 2000.
- [PT02a] V. Pipiras and M. Taqqu. Decomposition of self-similar stable mixed moving averages. *Probability theory and related fields*, 123 :412–452, 2002.

- [PT02b] V. Pipiras and M. Taqqu. The structure of self-similar stable mixed moving averages. *The Annals of Probability*, 30 :898–932, 2002.
- [Rai00] S. Raible. *Lévy processes in finance : theory, numerics and empirical facts*. PhD thesis, Universität Freiburg, 2000.
- [RCRB99] R. Riedi, M. Crouse, V. Ribeiro, and R. Baraniuk. A multifractal wavelet model with application to tcp network traffic. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45 :992–1018, 1999.
- [Roe94] G. Roepstorff. *Path integral approach to quantum physics : an introduction*. Springer, 1994.
- [Ros61] M. Rosenblatt. Independence and dependence. In *Proceedings of the 4th Berkeley symposium of mathematical statistics and probability*, 1961.
- [RU00] R.T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*, 2(3) :21–41, 2000.
- [RY91] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer, 1991.
- [Sam65] P.A. Samuelson. Rational theory of warrant prices. *Industrial Management Review*, 6 :13–31, 1965.
- [SB03] F. Selmi and J.-P. Bouchaud. Hedging large risks reduces transaction costs. *Wilmott Magazine*, page 64, March 2003.
- [SC99] G. Spivak and J. Cvitanic. Maximizing the probability of a perfect hedge. *The Annals of Applied Probability*, 9(4), 1999.
- [Sch92] M. Schweizer. Mean-variance hedging for general claims. *Annals of Applied Probability*, 2 :171–179, 1992.
- [Sch03a] W. Schachermayer. *Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXX - 2000*, volume 1816 of *Lecture Notes in Mathematics*, chapter Introduction to the Mathematics of Financial Markets. Springer, 2003.
- [Sch03b] F. Schmitt. A causal multifractal stochastic equation and its statistical properties. cond-mat/0305655, 2003.
- [Sco87] L.O. Scott. Option pricing when the variance changes randomly : theory, estimation and an application. *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 22 :419–438, 1987.
- [Sel03] F. Selmi. *Quartic hedging schemes for options*. PhD thesis, Université de Paris II-Assas, 2003. unpublished.
- [Sha85] W.F. Sharpe. *Investments*. Prentice-Hall, 1985.
- [Sil85] B.W. Silverman. *Density estimation for statistics and data analysis*, volume 26 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman&Hall, 1985.
- [Sin76] Ya.G. Sinai. Automodel probability distributions. *Theory of Probability and Applications*, 21 :63–80, 1976.
- [SK98] G. Sandmann and S.J. Koopman. Estimation of stochastic volatility models via Monte Carlo maximum likelihood. *Journal of Econometrics*, 87 :271–301, 1998.

- [Sm01] F. Schmitt and D. marsan. Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades. *European Physical Journal B*, 20 :3–6, 2001.
- [SMM03] D. Sornette, Y. Malevergne, and J.F. Muzy. What causes crashes ? *Risk Volume*, 16(2) :67–71, 2003.
- [SSL00] F. Schmitt, D. Schertzer, and S. Lovejoy. Multifractal fluctuations in finance. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(3) :361–364, 2000.
- [Sta71] H.E. Stanley. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. Oxford University Press, 1971.
- [Taq79] M.S. Taqqu. Convergence of integrated processes of arbitrary hermite rank. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 50(53-83), 1979.
- [Tay86] S.J. Taylor. *Modelling financial time series*. Wiley, 1986.
- [Tay94] S.J. Taylor. Modeling stochastic volatility : A review and comparative study. *Mathematical Finance*, 4 :183–204, 1994.
- [Tp00] A. Turiel and N. parga. Multifractal wavelet filter of natural images. *Physical Review Letters*, 85 :3325–3328, 2000.
- [TS94] M.S. Taqqu and G Samorodnisky. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall, 1994.
- [Tsa97] C. Tsallis. Lévy distributions. *Physics World*, pages 42–45, July 1997.
- [TTW95] M.S. Taqqu, V. Teverovsky, and W. Willinger. Estimator for long-range dependence : an empirical study. *Fractals*, 3 :785–798, 1995.
- [TVR01] J.N. Tsitsiklis and B. Van Roy. Regression methods for pricing complex american-style options. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 12(4) :694–703, 2001.
- [UO30] G.E. Uhlenbeck and L.S. Ornstein. On the theory of brownian motion. *Physical Review*, 36 :823–841, 1930.
- [VA98] N. Vandewalle and M. Ausloos. Multi-affine analysis of typical currency exchange rates. *The European Physical Journal B*, 4 :257–261, 1998.
- [Ver77] N. Veraverbeke. Asymptotic behaviour of wiener-hopf factors of a random walk. *Stochastic Processes and their Applications*, 5 :27–37, 1977.
- [VTP93] W.T. Vetterling, S.A. Teukolsky, and B.P. Press, W.H. and Flannery. *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1993.
- [wav] <http://www-stat.stanford.edu/wavelab/>.
- [WB03] M. Wyart and J.P. Bouchaud. Self-referential behaviour, overreaction and conventions in financial markets. cond-mat/0303584, 2003.
- [Wic50] G.C. Wick. The evaluation of the collision matrix. *Physical review*, 80 :268, 1950.
- [Wig87] J.B. Wiggins. Option values under stochastic volatility : theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economy*, 19(2) :351–372, 1987.
- [Wil98] P. Wilmott. *Derivatives*. Wiley, 1998.
- [YP02] Y. Yamada and J.A. Primbs. Distribution based options pricing on lattice asset dynamics model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 5(6) :599–618, 2002.

- [ZL01] G. Zumbach and P. Lynch. Heterogeneous volatility cascade in financial markets. *Physica A*, 298(3-4) :521–529, 2001.

